

Antonio Bianchini

antonio.bianchini@unipd.it

Lezioni di

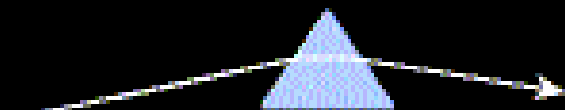
ASTRONOMIA

per il corso di Laurea in Matematica

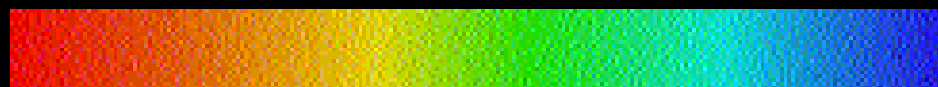
PARTE 2 - 1

RICHIAMI DI FISICA

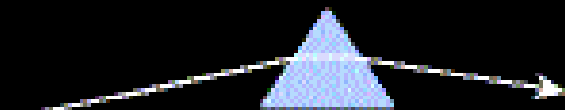
**LA FORMAZIONE DEGLI
SPETTRI STELLARI**



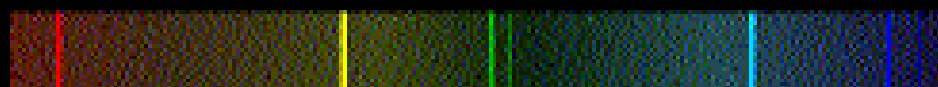
Continuous Spectrum



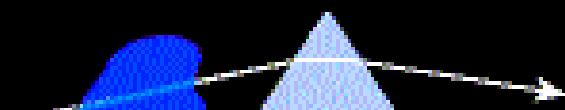
Hot Gas



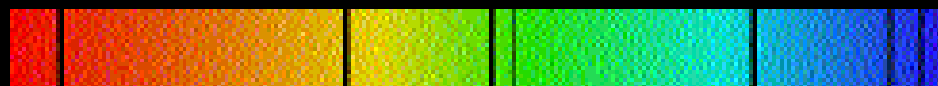
Emission Spectrum



Cold Gas



Absorption Spectrum



La quantizzazione orizzontale: le righe spettrali e gli spettri a righe.

5.3 La quantizzazione della luce

5.3.1 Le transizioni bound-bound e la *quantizzazione orizzontale* dello spettro della radiazione.

Negli atomi, neutri o ionizzati, i livelli energetici degli elettroni sono *quantizzati*. I processi di assorbimento ed emissione di energia avvengono attraverso lo scambio di quantità di energia ben precise, definite dalla differenza dei livelli energetici coinvolti. I fotoni hanno quindi frequenze date da relazioni del tipo

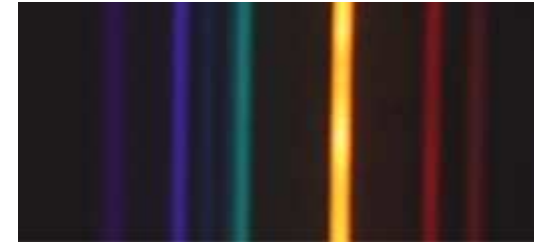
$$E_i - E_j = h\nu_{ji} \quad (5.2)$$

dove i e j sono due livelli energetici permessi dalle *regole di selezione* delle transizioni. Le transizioni possibili mostrano delle regolarità e possono essere raggruppate in ben determinate *serie*. Le frequenze relative alle transizioni che danno origine alle diverse

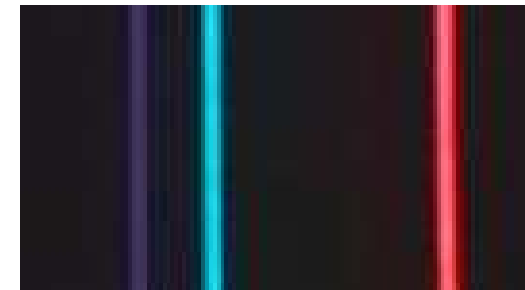
Il problema degli spettri atomici

Negli anni alla fine del 1900, si osservò che la luce emessa da gas luminosi non mostrava una distribuzione continua di lunghezze d'onda, ma formava un **insieme discreto di colori**, diversi per i vari gas. Queste **"linee spettrali"** si disponevano in una serie regolare e si giungerà ad interpretarle come transizioni tra livelli atomici di energia. Allora, rappresentavano un grosso problema per la Fisica Classica. Si sapeva che particelle cariche accelerate emettono onde elettromagnetiche, e ci si aspettava che orbite di elettroni intorno ai nuclei fossero instabili, in quanto, a causa della perdita di energia elettromagnetica emessa, sarebbero stati attratti dal nucleo. Non si poteva trovare alcun modello classico che portasse ad orbite stabili degli elettroni.

Il **modello atomico di Bohr** segnò il passo fondamentale verso una moderna teoria atomica. Il punto fondamentale fu il postulato che il **momento angolare è quantizzato**, permettendo di ottenere solo **specifici livelli di energia**. In seguito, lo sviluppo della Meccanica Quantistica e **l'equazione di Schrödinger** permisero di comprendere i postulati ed i risultati del modello all'interno di una teoria completa e consistente.



Helium spectrum



Hydrogen spectrum

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad \begin{matrix} n_1, n_2 \text{ interi} \\ (n_1 > n_2) \end{matrix}$$

R_H , costante di Rydberg
 $= 1.097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$

Le serie sono date da formule empiriche del tipo

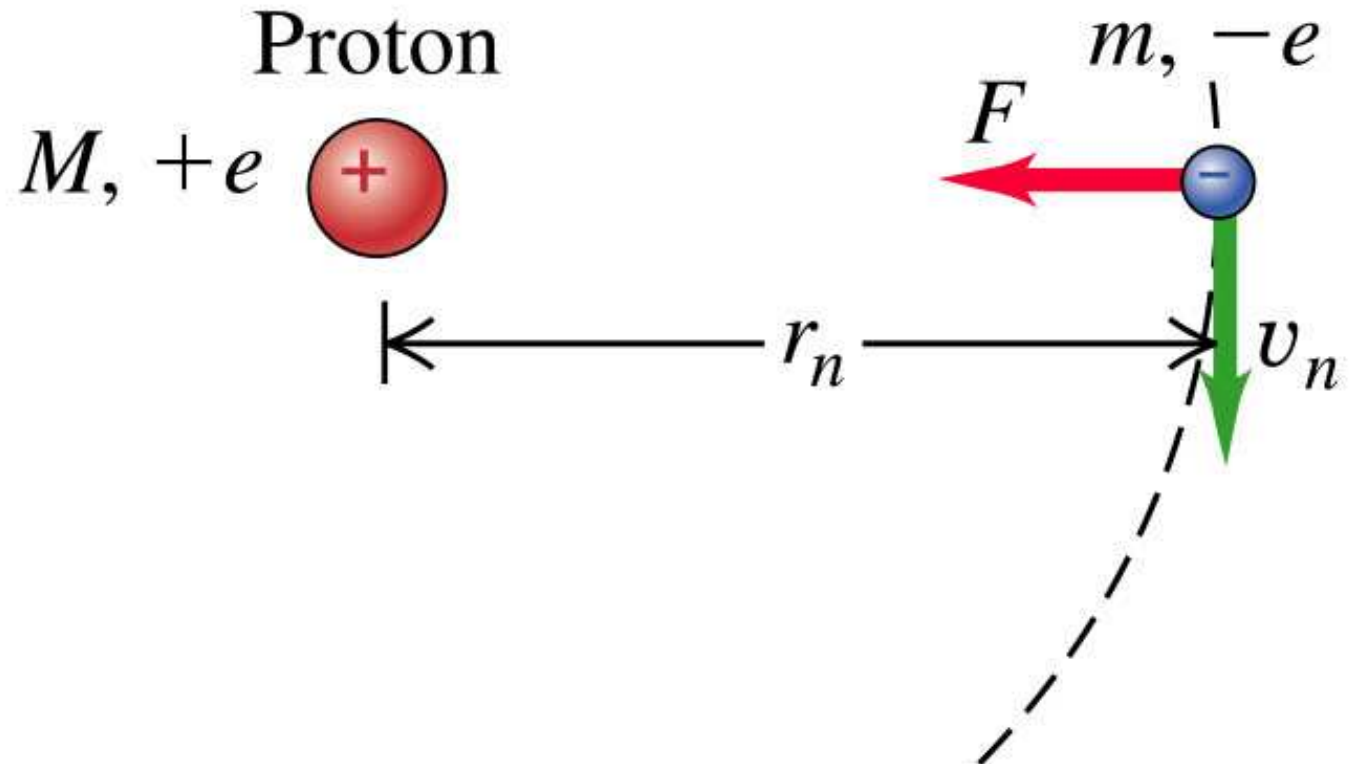
$$\nu = \frac{R}{(n_1 + a_1)^2} - \frac{R}{(n_2 + a_2)^2} \quad (5.3)$$

dove R é la costante di Rydberg, n_1 ed n_2 sono numeri interi (con $n_2 > n_1$) ed a_1 e a_2 sono dei numeri, non interi, scelti opportunamente in modo da rappresentare qualsiasi serie di transizioni osservate. Per esempio, la serie di Balmer per l'idrogeno si ottiene ponendo $a_1 = 0, a_2 = 0, n_1 = 2$.

Il tipo di quantizzazione dei livelli di energia descritto dalle formule empiriche é spiegato dalla meccanica ondulatoria.

L'atomo di B

Consideriamo un elettrone che orbiti attorno ad un protone. La forza centripeta che causa il moto orbitale, è rappresentata dalla forza di attrazione coulombiana tra le due cariche elettriche uguali (diverse sono, invece, le due masse).



Abbiamo visto nel capitolo precedente che ad ogni elettrone può essere associata una lunghezza d'onda $\lambda = h/p$. De Broglie dimostró che le orbite dell'atomo di Bohr potevano essere descritte dalla condizione che la circonferenza di un'orbita debba contenere un numero intero di lunghezze d'onda. In effetti, il campo elettrico dei nuclei atomici sono delle buche di potenziale entro le quali possono esistere solo onde *stazionarie* ! Se assumiamo che il baricentro del sistema *protone-elettrone* di un atomo di idrogeno coincida con il protone stesso possiamo scrivere il momento dell'elettrone

$$p = m_e \omega r \quad (5.4)$$

e il suo momento angolare

$$rp = m_e r^2 \omega \quad (5.5)$$

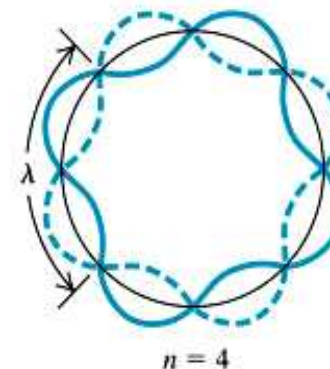
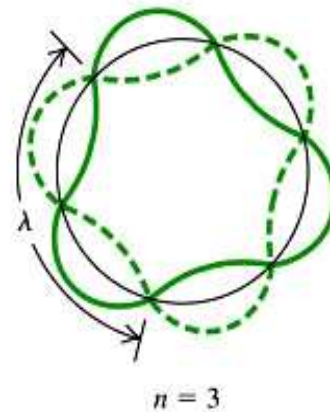
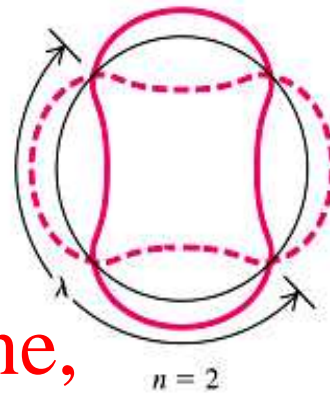
L'onda associata all'elettrone sará

$$\lambda = \frac{h}{m_e r \omega} \quad (5.6)$$

*Onde stazionarie
“orbitali”.*

Considerando l'onda
di De Broglie
associata ad un elettrone,
saranno permesse solo
orbite circolari le cui
circonferenze
corrispondono ad un
numero intero di
lunghezze d'onda.

$$\lambda = h / p = h / mv$$



La condizione di de Broglie di stazionarietà dell'onda associata all'elettrone che si trova in una certa orbita (livello) diventa

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{m_e r \omega} \quad (5.7)$$

dove n è un numero intero. Quindi, dall'ipotesi ondulatoria si ricava la condizione di quantizzazione del momento angolare delle orbite:

$$m_e r^2 \omega = n \frac{h}{2\pi} \quad (5.8)$$

La forza centripeta cui è sottoposto l'elettrone è

$$m_e \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.9)$$

Infine, l'energia totale dell'elettrone può scriversi come

$$E = 1/2 m_e r^2 \omega^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -1/2 m_e r^2 \omega^2 \quad (5.10)$$

Dividendo la quantità $\omega^2 r^3$, ricavata dalla espressione della forza centrifuga, per la quantità $r^2 \omega$, ricavata dalla espressione della quantizzazione del momento angolare, si ottiene per il prodotto ωr l'espressione

$$\omega r = \frac{e^2}{2\epsilon_0 n h}$$

che, sostituita nell'espressione dell'energia, da

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 (h/2\pi)^2} \quad (5.11)$$

da cui si vede che all'aumentare del numero quantico n l'energia totale tende al limite nullo, mentre le differenze tra i livelli quantici tendono a diminuire sempre piú.

Possiamo infine ricavare i valori "possibili" dei raggi

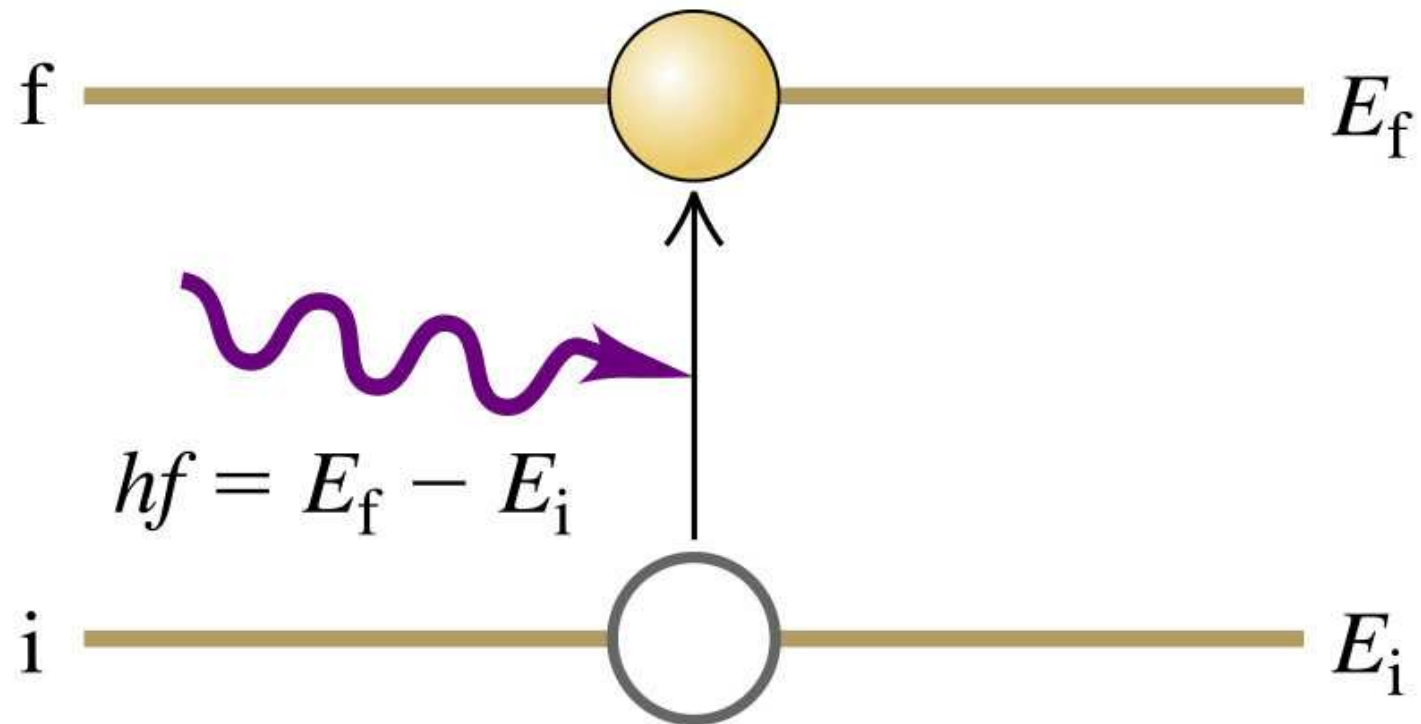
$$r_n = -\frac{4\pi\epsilon_0 n^2 (h/2\pi)^2}{m_e e^2} \quad (5.12)$$

I possibili stati energetici dell'elettrone, E_n , sono negativi perché rappresentano l'energia di legame col nucleo; all'aumentare del numero quantico n l'energia di legame diminuisce in valore assoluto tendendo a zero. Contemporaneamente, i raggi r_n aumentano tendendo all'infinito dove l'elettrone non sente più il campo elettrico del nucleo. La più piccola delle orbite possibili sarà quella per $n = 1$, che corrisponderà allo *stato fondamentale* dell'atomo non eccitato. Ogni elettrone tende ad occupare i livelli più bassi di energia, se non sono occupati da altri elettroni. Quando un elettrone, assorbendo energia, si porta ad un livello superiore, l'atomo si dice *eccitato*. Ricordiamo che il tempo di permanenza di un atomo nello stato eccitato è di soli $\sim 10^{-8} \text{sec}$.

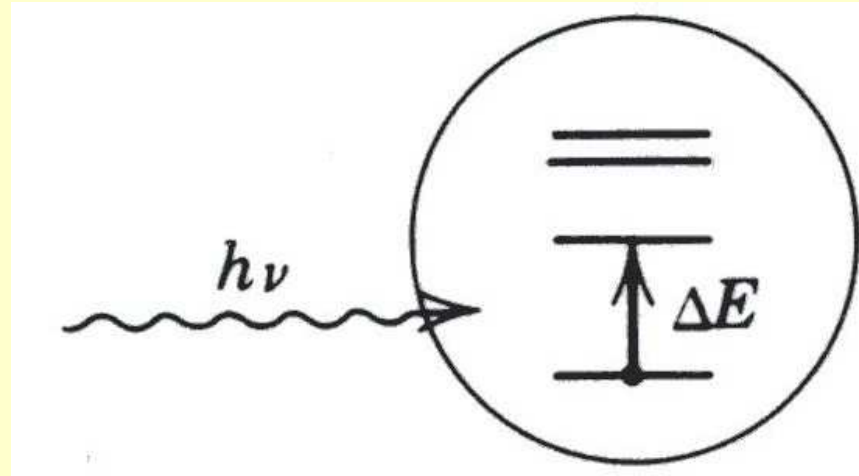
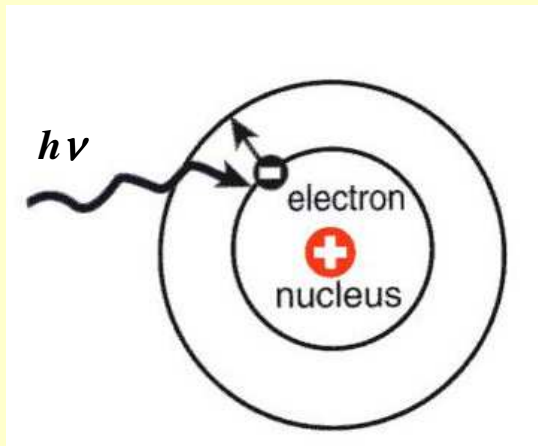
Poiché al crescere di n l'energia tende rapidamente a zero, l'elettrone sarà ben presto libero, diventando minima l'energia necessaria per portarlo a valori positivi della sua energia totale, energia che l'elettrone può facilmente acquistare per urto o per assorbimento di un fotone.

Dalla forma dell'espressione dell'energia E_n si vede come essa riproduca bene i termini dell'equazione empirica di Balmer (1885) che rappresenta la serie di transizioni dell'atomo di idrogeno osservate nel visuale.

ECCITAZIONE DI UN ATOMO - ASSORBIMENTO DI UN FOTONE



Processo di assorbimento di un fotone

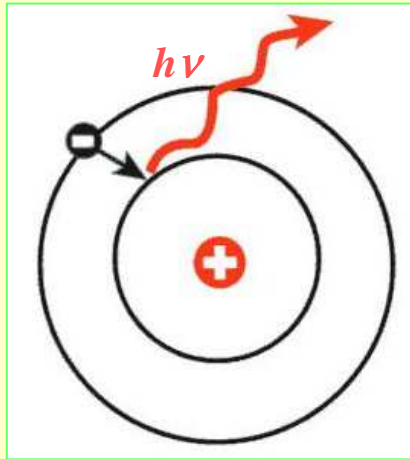


L'atomo nel livello inferiore assorbe il fotone incidente e si porta nel livello superiore, separato in energia di ΔE .

Nel processo, l'energia del fotone $h\nu$ viene acquisita dall'atomo (per la conservazione dell'energia dev'essere: $h\nu = \Delta E$)

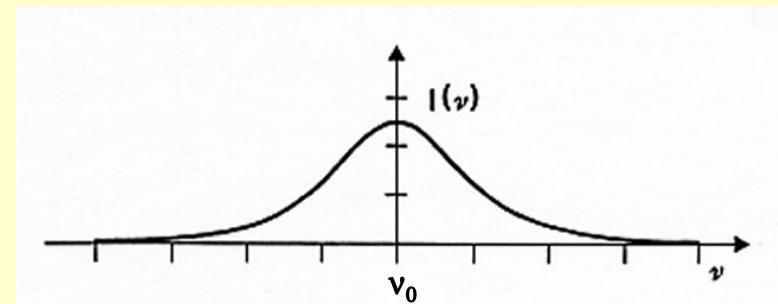
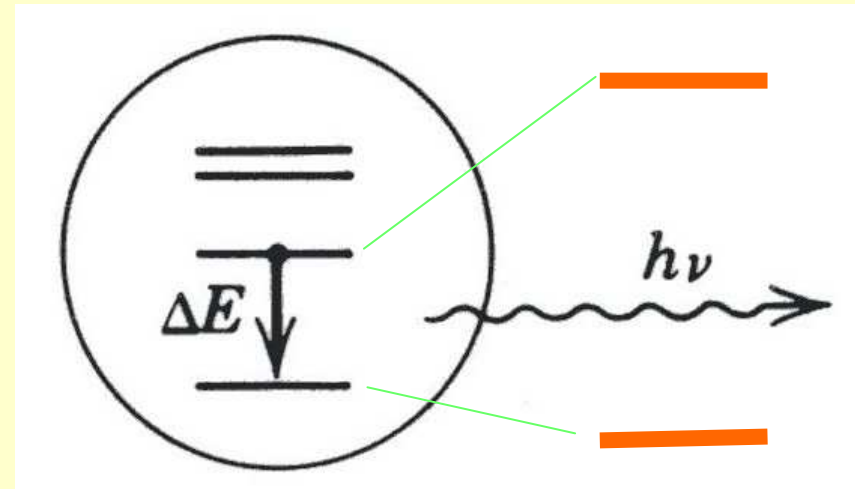
PROCESSI DI DISECCITAZIONE

Processo di emissione spontanea di un fotone



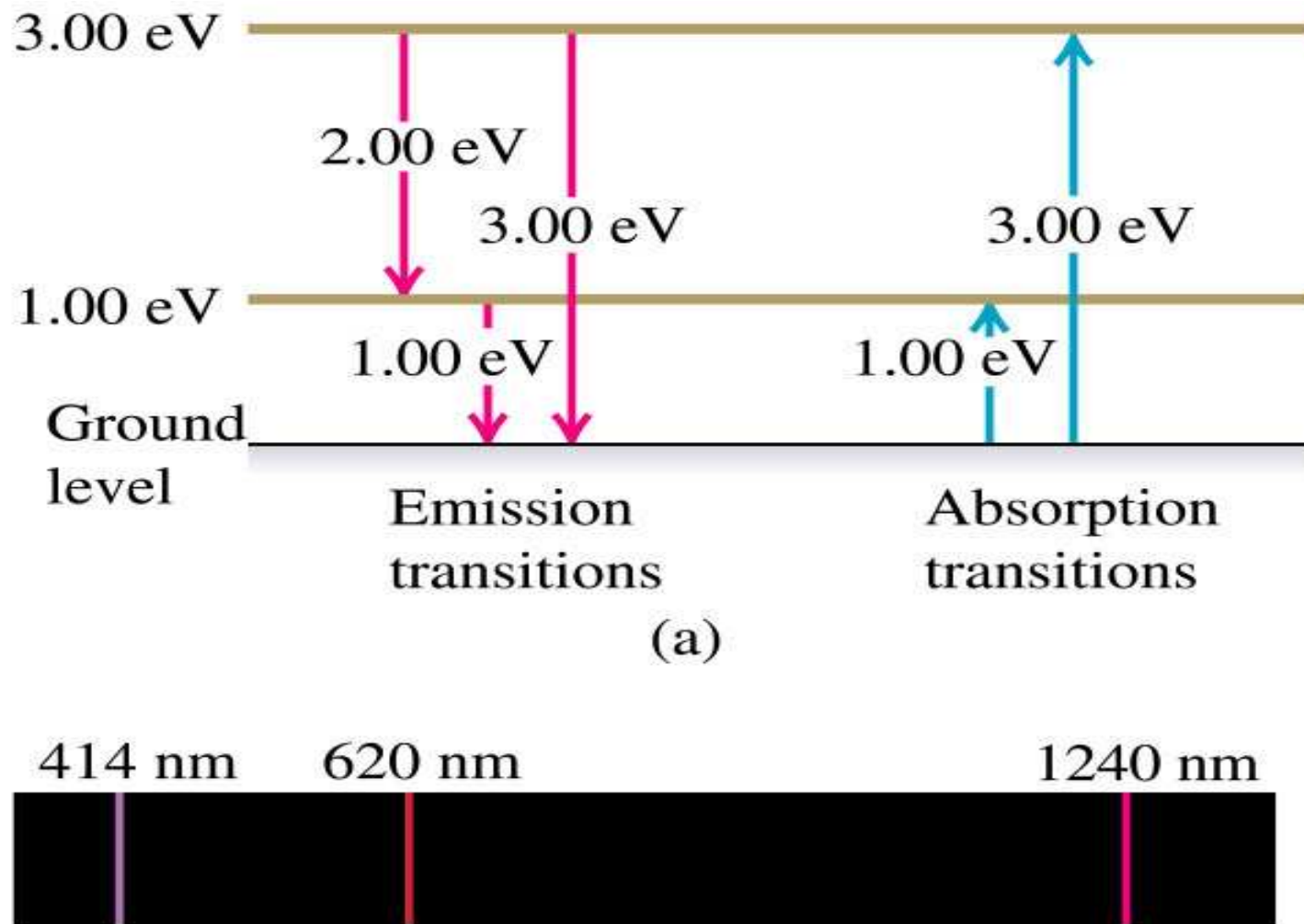
L'atomo nel livello eccitato emette un fotone e si porta nel livello inferiore.

Il processo avviene *spontaneamente*. La direzione del fotone è *casuale* e la sua frequenza è distribuita in una *banda spettrale* di larghezza dell'ordine di 100 MHz.



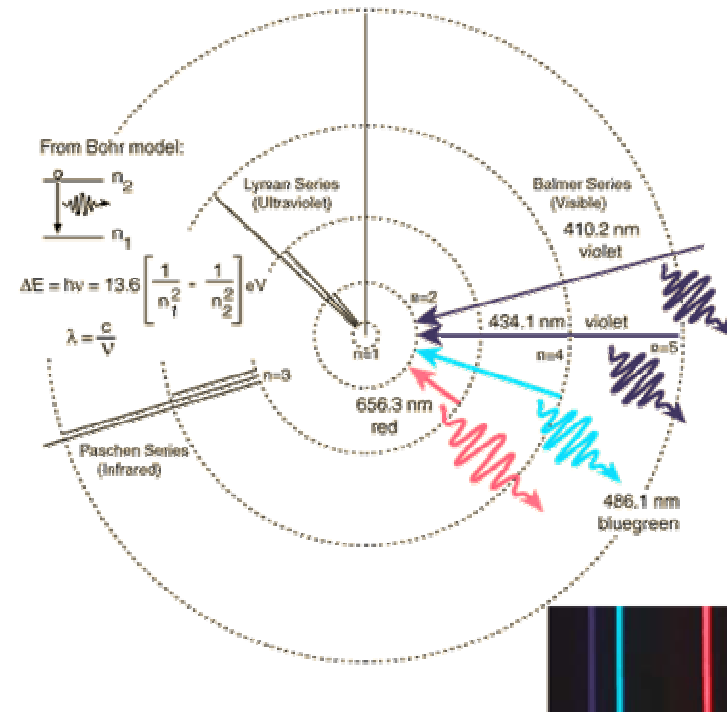
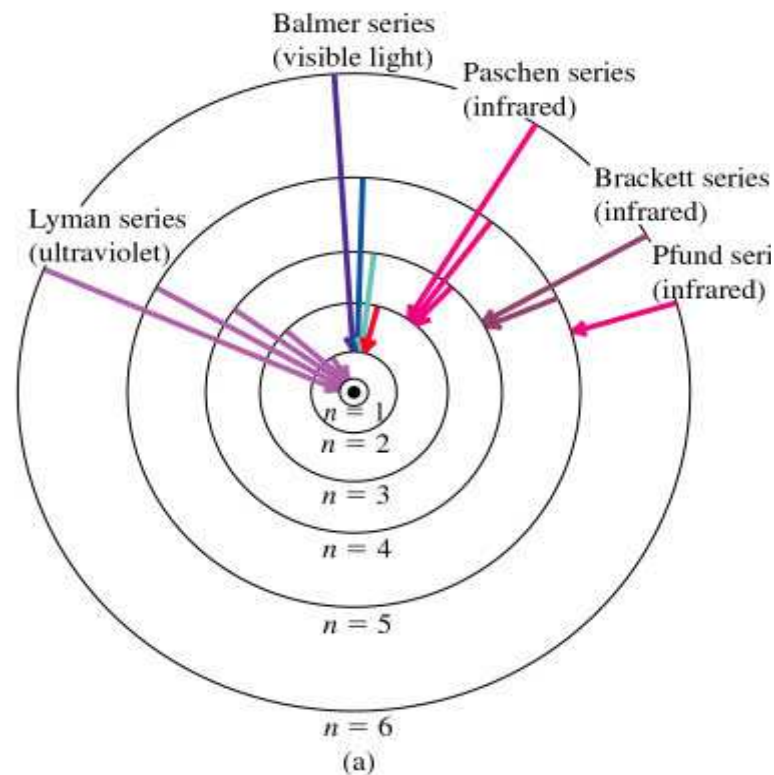
$$h\nu_0 = \Delta E$$

DISECCITAZIONE DI UN ATOMO - EMISSIONE DI FOTONI



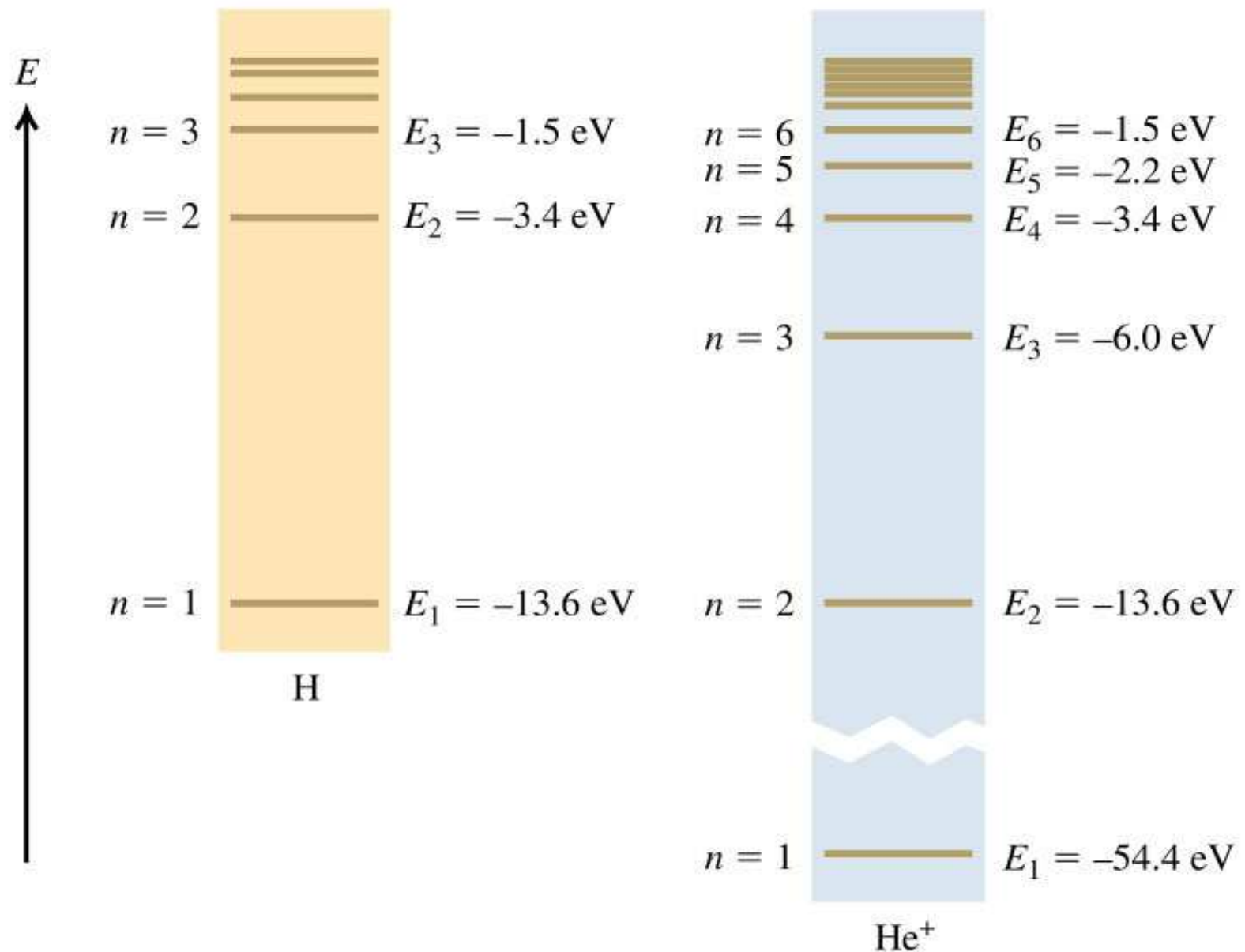
righe in emissione nello spettro prodotto dai fotoni emessi

PRODUZIONE DI SERIE DI RIGHE SPETTRALI
OGNI SPECIE IONICA DI OGNI ATOMO PRODUCE,
PER RICOMBINAZIONE, LE RIGHE E/O LE SERIE DI
RIGHE CHE LO DISTINGUONO DA OGNI ALTRO IONE.



LE PRINCIPALI SERIE DELL'IDROGENO PRODOTTE,
PER RICOMBINAZIONE, DALL'IDROGENO IONIZZATO !

I nuclei dei due atomi hanno potenziali coulombiani diversi e quindi diversi sono i livelli energetici, anche assumendo in He un solo elettrone.

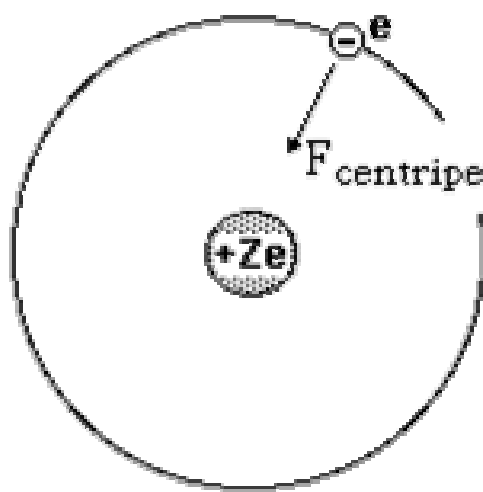


RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO PER UN ATOMO 'IDROGENOIDE', OVVERO CHE POSSIEDE UN SOLO ELETTRONE ATTORNO AD UN NUCLEO CON Z PROTONI.

APPLICHIAMO ANCORA IL PRINCIPIO DI STAZIONARIETA' DELL'ONDA DI DE BROGLIE DELL'ELETTRONE. SI RICAVANO I VALORI POSSIBILI DEI RAGGI ORBITALI E QUINDI I LIVELLI ENERGETICI POSSIBILI.

COME VISTO PRIMA, QUESTO E' EQUIVALENTE AD IMPORRE LA QUANTIZZAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE DEGLI ELETTRONI.

Il modello atomico di Bohr - Orbita classica dell'elettrone



The orbit energy is negative because this is a bound state.

Newton's Second Law

$$F_{\text{centripetal}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

so

Kinetic Energy T

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Potential Energy

$$U = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Total Energy

$$T + U = \frac{-Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

This is the energy of a single electron in orbit around a bare nucleus

Nel [modello di Bohr](#), questo risultato classico fu combinato con la [quantizzazione del momento angolare](#), per ottenere un'espressione dei [livelli quantizzati di energia](#).

La quantizzazione del momento angolare

Nel modello di Bohr la lunghezza d'onda associata all'elettrone è data dalla relazione di de Broglie (si vedano le trasparenze successive)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

a cui si unisce la condizione di stazionarietà: **lunghezza della circonferenza = numero intero di lunghezze d'onda**

$$2\pi r = n\lambda$$

Queste due condizioni si combinano per dare l'espressione quantizzata del **momento angolare** per l'elettrone in orbita:

$$L = mvr = \frac{hr}{\lambda} = \frac{hr}{2\pi r/n} = \frac{nh}{2\pi} \equiv n\hbar$$

Quindi **L** non solo è conservato (non dipende dal tempo), ma è costretto ad assumere valori discreti, multipli di **$h/2\pi$** secondo il **numero quantico n**. Questa **quantizzazione del momento angolare** è un risultato fondamentale e può essere usato per determinare i raggi e le energie delle orbite di Bohr.

Combinando il procedimento seguito nel caso classico con la [quantizzazione del momento angolare](#), l'approccio di Bohr fornisce le espressioni per i raggi e le energie delle orbite degli elettroni:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(mvr)^2}{2mr^2} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 mr^2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

energia cinetica dell'elettrone espressa in funzione del momento angolare uso della condizione di quantizzazione energia cinetica orbitale classica

vale per atomi idrogenoidi: Z protoni e 1 elettrone

da queste espressioni si ricava:

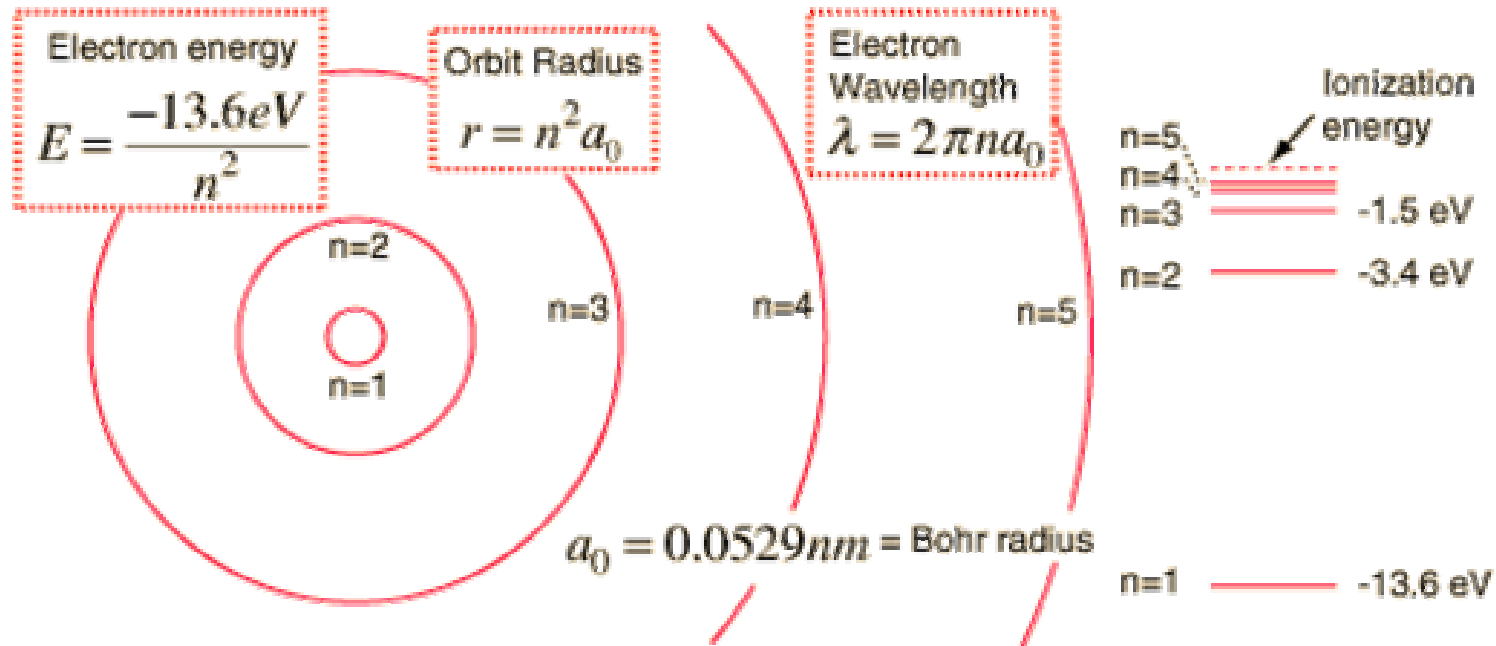
$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{Z\pi m e^2} = \frac{n^2 a_0}{Z} \qquad E = - \frac{Z^2 m e^4}{8n^2 h^2 \epsilon_0} = - \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} Z^2$$

$a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} = \text{raggio di Bohr}$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Livelli di energia dell'atomo di idrogeno

I livelli di energia dell'atomo di idrogeno sono in accordo con quelli del modello di Bohr.
La descrizione pittorica usuale è quella di **una struttura ad orbite** (o gusci), con ogni orbita associata ad uno dei valori del **numero quantico principale n**.



La descrizione dell'atomo tramite le orbite del modello di Bohr è una utile visualizzazione; non bisogna tuttavia dimenticare che, come risulterà dalla Meccanica Quantistica, i concetti di orbita e raggio orbitale saranno sostituiti da concetti quali la distribuzione di probabilità di posizione.

Il modello di Bohr prevede che gli elettroni **occupino una delle possibili orbite quantizzate**, senza emissione di onde elettromagnetiche. L'emissione avviene quando l'elettrone passa da un'orbita all'altra; in questa transizione avviene l'emissione di un fotone di **energia pari alla differenza di energia tra le due orbite**.



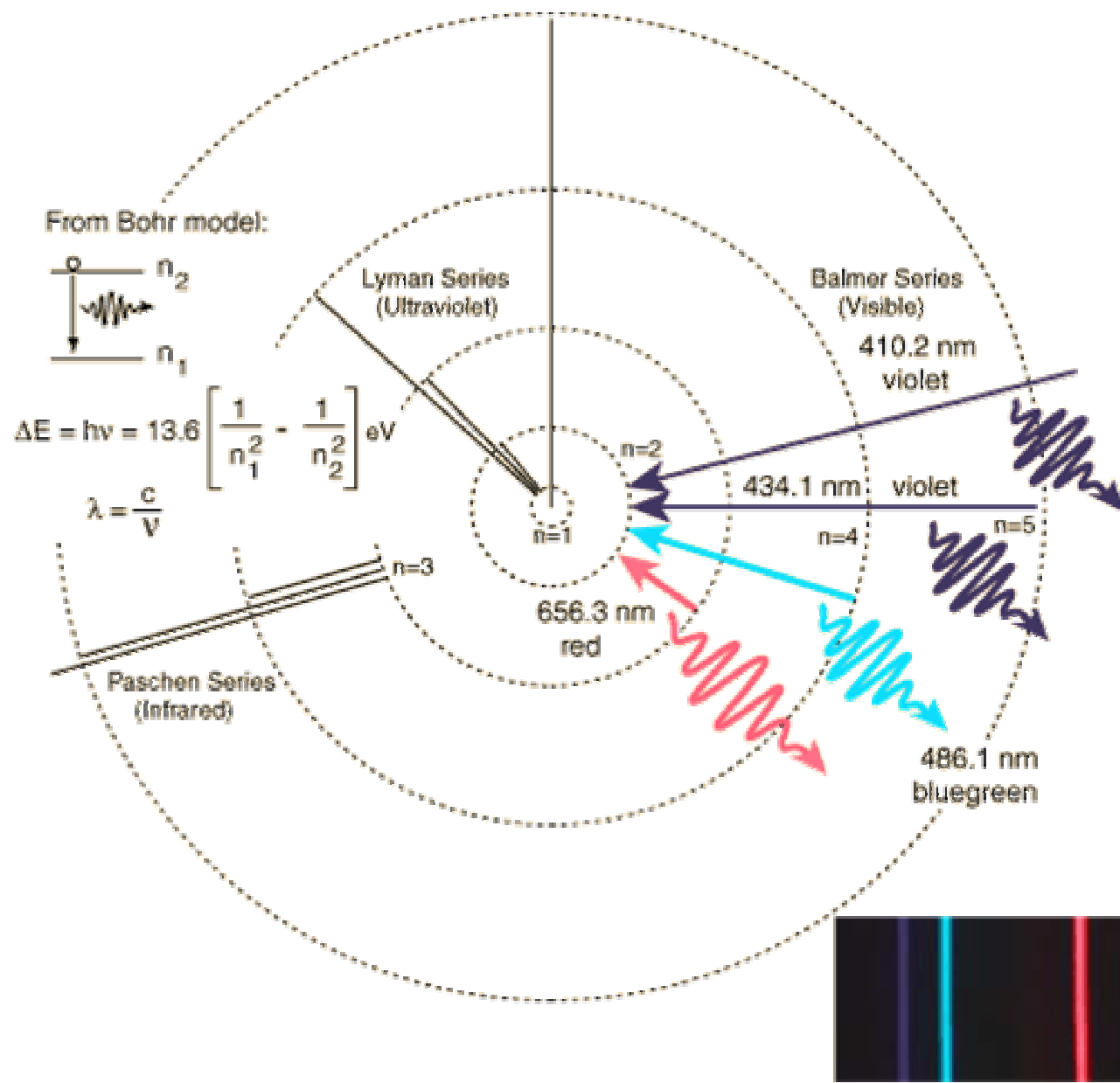
Dall'espressione dei livelli quantizzati di energia si ha

$$h\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = 13.6 \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \text{ eV}$$

Questa relazione può essere scritta come $\left(h\nu = \frac{hc}{\lambda} \right)$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad \text{con} \quad R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3}$$

$$R_H = 1.097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$$



From Bohr model:

$\Delta E = h\nu = 13.6 \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \text{ eV}$

$\lambda = \frac{c}{\nu}$

Le debolezze del modello di Bohr

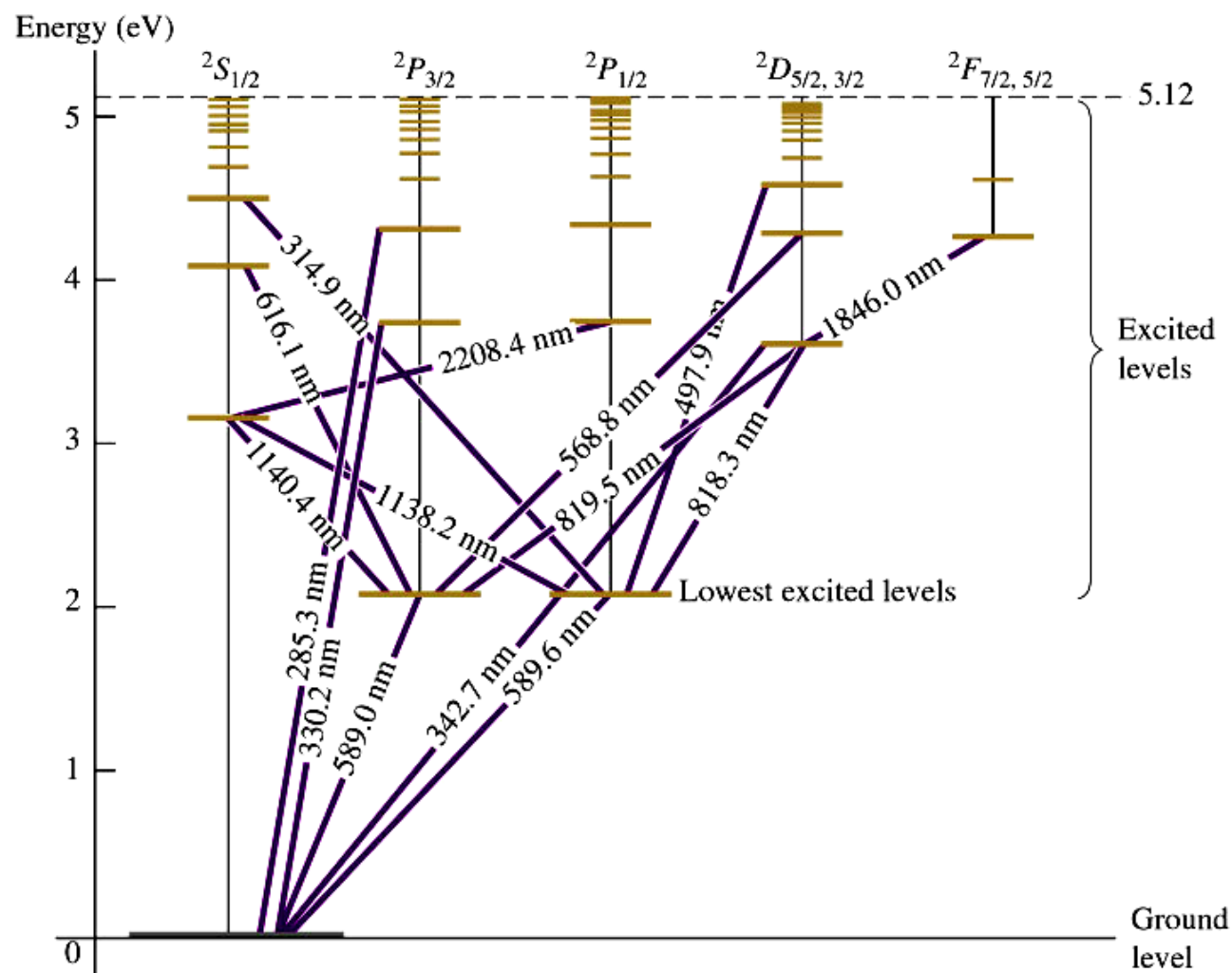
Anche se il modello di Bohr rappresentò un passo avanti fondamentale verso la costruzione della **teoria quantistica degli atomi**, non rappresenta in realtà la corretta descrizione teorica della natura delle orbite elettroniche.

Le sue principali manchevolezze sono:

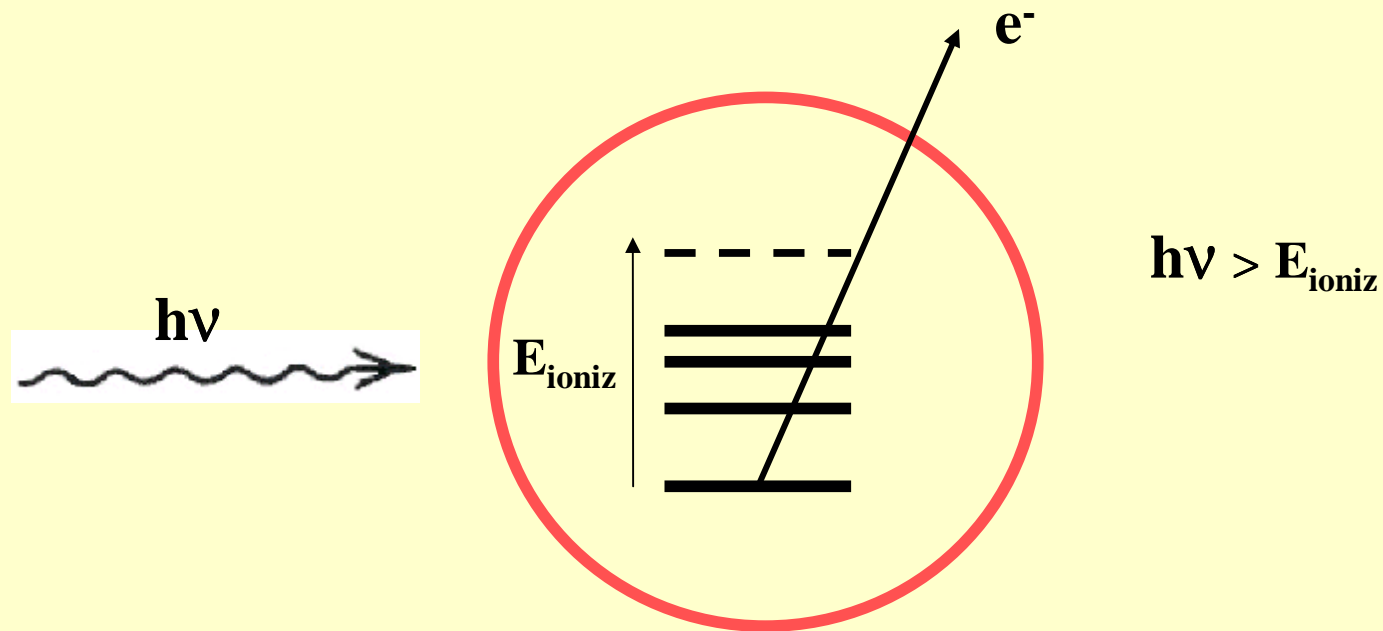
1. **Non permette di capire perché certe linee spettrali sono più luminose di altre. Non vi è alcun meccanismo che permetta di calcolare la probabilità di transizione tra livelli atomici.**
2. **Il modello di Bohr considera gli elettroni come pianeti in miniatura, in rotazione intorno al nucleo con un ben preciso raggio ed impulso. Questo viola il principio di indeterminazione, secondo cui posizione ed impulso non possono essere esattamente determinati contemporaneamente.**

Il modello di Bohr ci fornisce un modello concettualmente semplice e fondamentale delle orbite e delle energie degli elettroni atomici. I dettagli dello spettro e della distribuzione di cariche sono ottenibili solo dai calcoli della Meccanica Quantistica e dell'equazione di Schrödinger. Molti dei risultati del modello di Bohr (compresa la sua ipotesi di quantizzazione) saranno ritrovati all'interno di una teoria completa e consistente.

...e poi, assume raggi orbitali che tendono ad infinito e questo è' incomprensibile da un punto di vista pratico !!!



UN ATOMO PERDE UN ELETTRONE E DIVENTA UNO IONE



Se l'energia del fotone è maggiore dell'energia di ionizzazione, si può verificare la foto-emissione di un elettrone

5.3.2 la ionizzazione

Se si trasferisce ad un atomo (per via radiativa o collisionale) una energia sufficiente a portare un elettrone oltre il massimo livello di energia consentito all'interno della buca di potenziale dell'atomo, che corrisponde al valore nullo, allora si ottiene la ionizzazione di quell'atomo. Schematicamente, diremo che un atomo neutro X perdendo un elettrone si trasforma in uno ione positivo:



In astronomia, si scrive convenzionalmente $H^+ = HII \dots$

L'energia necessaria per ionizzare un atomo dipende anche dallo stato di ionizzazione dell'atomo stesso e dal particolare elettrone che si vuole liberare, ovvero dal suo livello energetico di partenza, e quindi dipende anche dallo stato di eccitazione dell'atomo. . In pratica si tratta di portare quell'elettrone ad un livello energetico superiore a quello dell'ultimo livello possibile all'interno della buca di potenziale rappresentata dall'atomo, che coincide con il limite energetico di una serie. Si dice anche che il livello di arrivo si trova nel continuo.

Equilibrio termodinamico e livello di ionizzazione degli atomi

Gli atomi possono essere nel loro livello fondamentale, eccitati o ionizzati. Si ha *equilibrio termodinamico* quando, in un dato istante ed in una certa regione del gas, tanti sono gli atomi che passano da uno stato di eccitazione o di ionizzazione A ad uno stato di eccitazione o di ionizzazione B quanti quelli che passano dallo stato B allo stato A (e questo avviene anche in condizioni di solo *equilibrio termico*) ed inoltre la materia e la radiazione sono in equilibrio, ovvero la temperatura del campo di radiazione (che è la temperatura dello spettro di corpo nero) è uguale alla temperatura del gas.

In condizioni di *equilibrio termico*, secondo la statistica di Boltzman, il rapporto tra il numero N_i di atomi che si trovano al livello i e quello N_0 di atomi che si trovano allo stato fondamentale, è dato da:

$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{w_i}{w_0} e^{-\chi_i/KT} \quad (5.33)$$

essendo χ il potenziale di eccitazione (in volt-elettroni) del livello i -esimo e dove w_i e w_0 sono costanti atomiche, ossia i pesi statistici dei livelli i e fondamentale. Il peso statistico risulta pari alla *multiplicità* del livello, cioè pari a $2J + 1$, dove J è il *numero quantico interno* del livello dato. Prendendo i logaritmi decimali si ha:

$$\log \frac{N_i}{N_0} = \log \frac{w_i}{w_0} - 5040 \frac{\chi_i}{T} \quad (5.34)$$

Analogamente, il rapporto tra N_i e il numero totale N di atomi di un certo tipo, é espresso, sempre nella statistica di Boltzmann da:

$$\frac{N_i}{N} = \frac{w_i}{W(T)} e^{-\chi_i/KT} \quad (5.35)$$

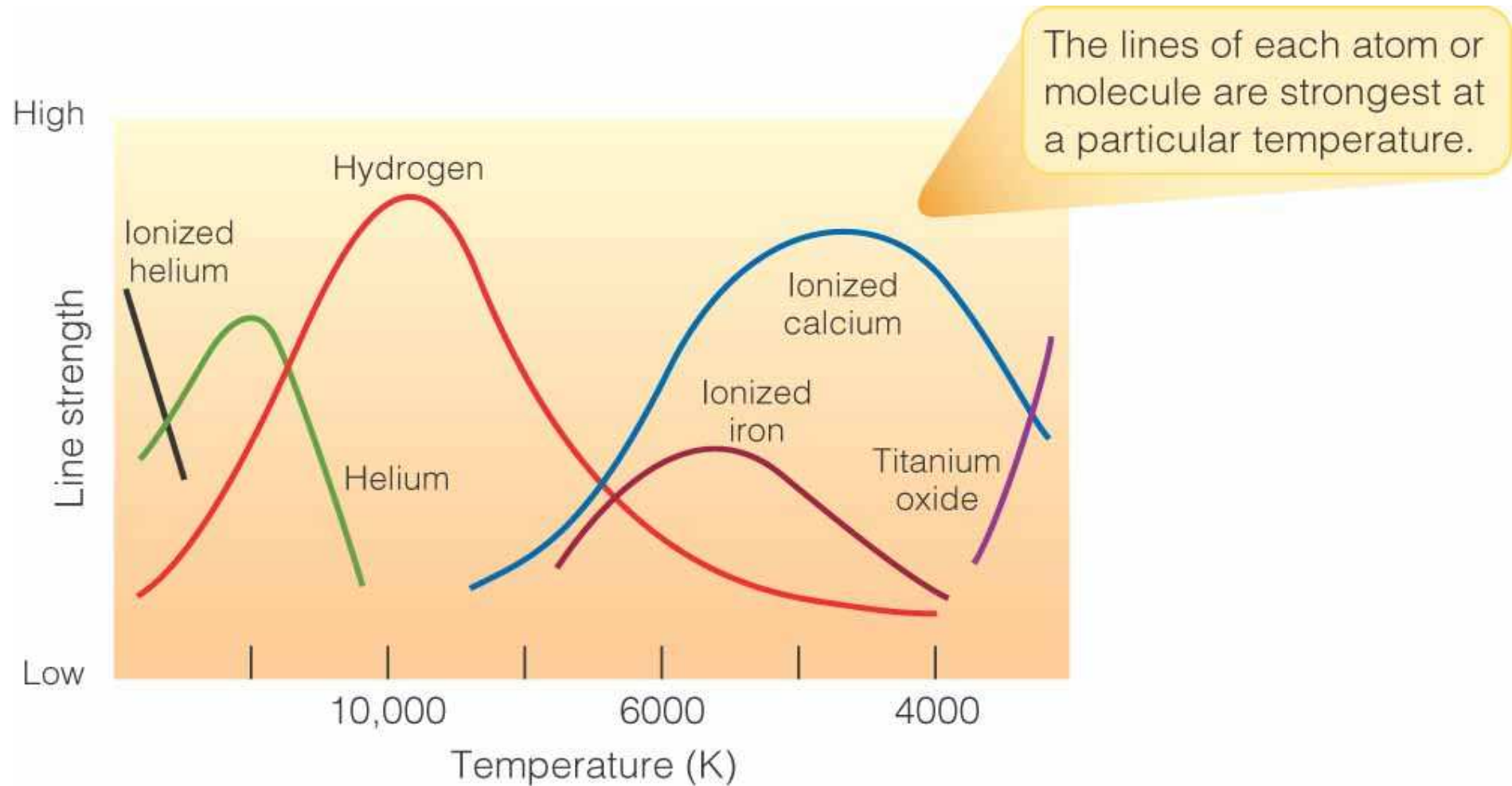
dove

$$W(T) = w_0 + w_1 e^{-\chi_1/KT} + \dots + w_n e^{-\chi_n/KT}$$

é detta *funzione di ripartizione degli atomi nei vari livelli di eccitazione*. La temperatura che entra in queste relazioni é detta *temperatura di eccitazione* del gas.

I livelli atomici, cioè i livelli energetici corrispondenti a onde tridimensionali stazionarie, spiegano lo spettro a righe emesso dai gas rarefatti. Ovvero, la quantizzazione orizzontale (vista nello spettro) della radiazione.

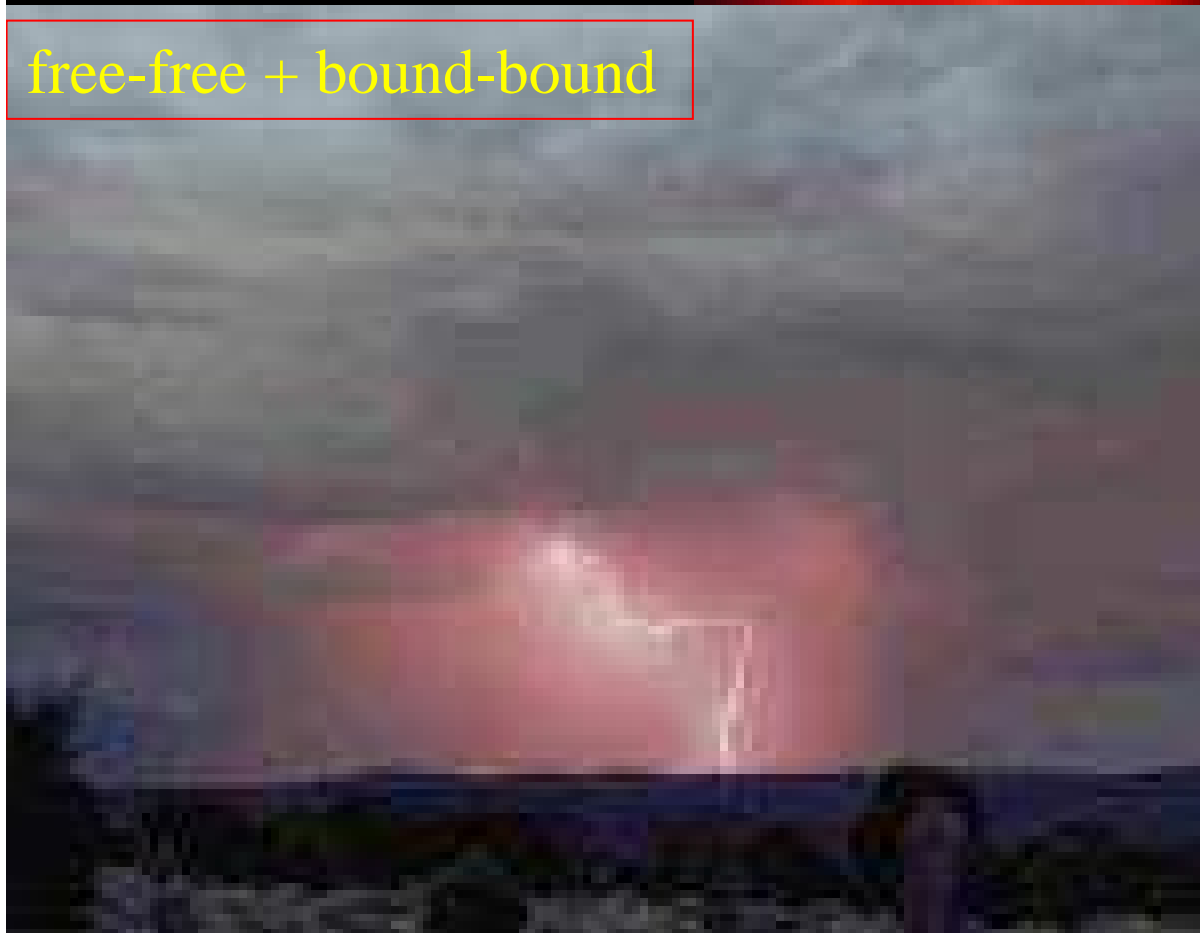
La temperatura del gas decide quali specie ioniche sono più visibili, ovvero quali righe vediamo nello spettro.



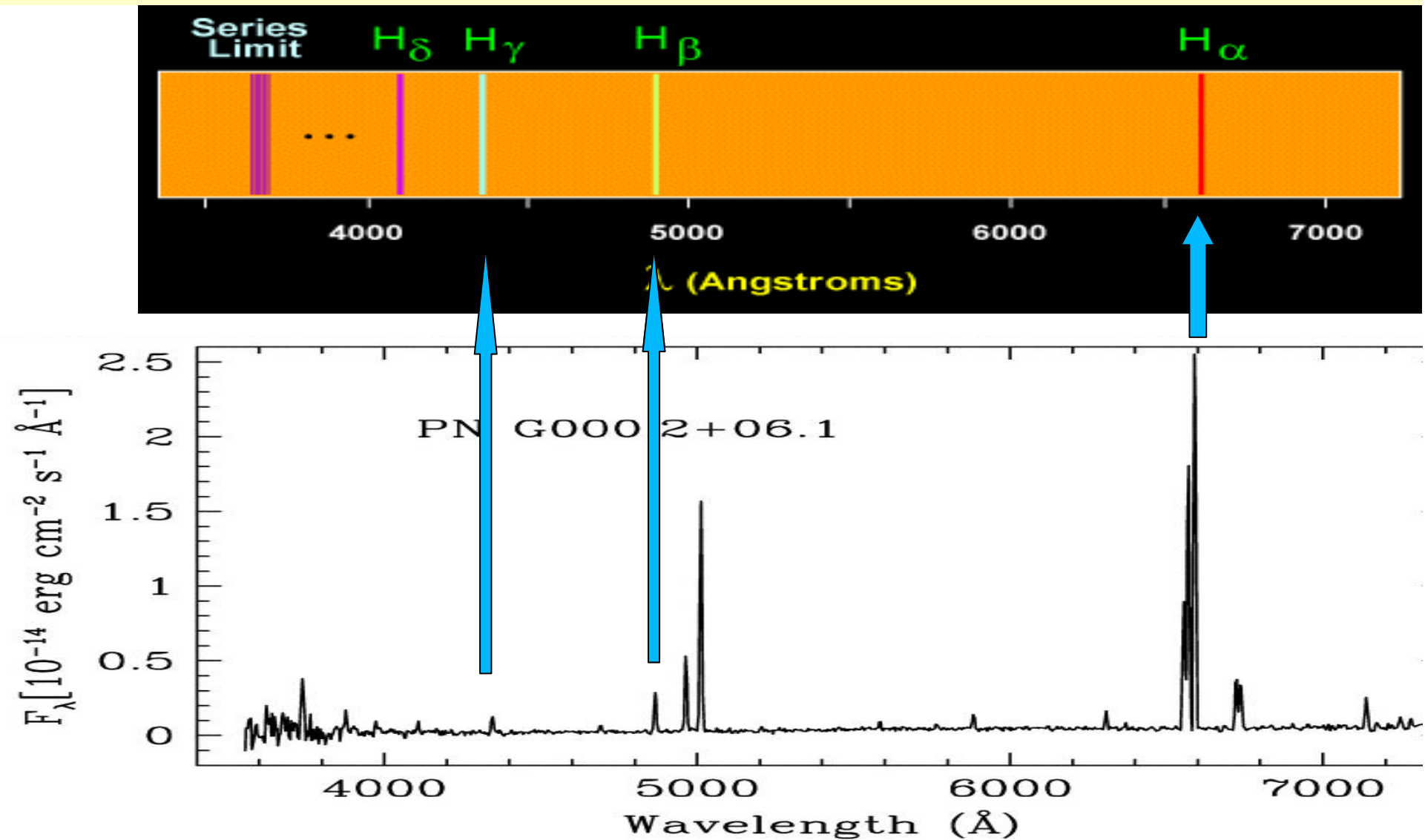
Inoltre, quando un atomo si ionizza (e perde uno o più elettroni) cambiano i livelli energetici dei restanti elettroni e quindi le energie dei fotoni emessi o assorbiti. Cambia dunque lo spettro a righe osservato.



free-free + bound-bound



LE NEBULE GALATTICHE O CIRCUSTELLARI SPESSO MOSTRANO LA SERIE DI BALMER (H) IN EMISSIONE



MA COME SI FORMA LO SPETTRO CONTINUO NELLE STELLE ?

I DIVERSI MECCANISMI (TERMICI E NON TERMICI) DI PRODUZIONE DELLA RADIAZIONE (FOTONI) ALL'INTERNO DEL PLASMA STELLARE NON PRODUCONO LO SPETTRO DI CORPO NERO OSSERVATO. ALLORA, DOV'E' IN QUESTO CASO LA CAVITA' RISONANTE ?

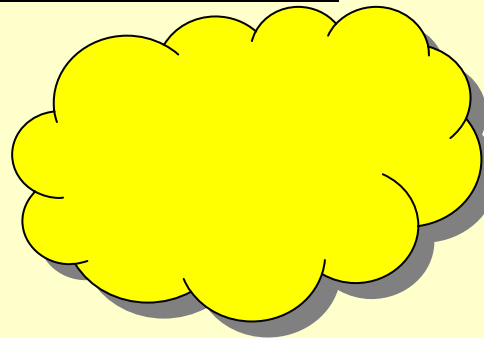
IL FATTO E' CHE IL GAS STELLARE E' OPACO ALLA RADIAZIONE PRODOTTA CHE VIENE QUINDI ASSORBITA E RIEMESSA MOLTISSIME VOLTE PRIMA DI USCIRE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE STELLARE (FOTOSFERA). PERCIO', LA RADIAZIONE CHE ESCE DALLA FOTOSFERA NON E' COMPOSTA DAI FOTONI INIZIALMENTE PRODOTTI NELL'INTERNO STELLARE.

Quantizzazione verticale: il corpo nero.

L'emissione di corpo nero, la formula di Planck e la *quantizzazione verticale* dello spettro della radiazione.

Definiamo *spettro di corpo nero* lo spettro continuo delle radiazioni elettromagnetiche emesse dai corpi materiali (generalmente in condizioni di densità e temperatura relativamente elevate) quando essi non *contaminano* tale emissione riflettendo la luce di altre sorgenti esterne. Perciò un corpo nero essenzialmente è un corpo che non riflette la luce che eventualmente lo colpisce ma l'assorbe. Un oggetto incandescente, non troppo luminoso, posto in una grande stanza buia con pareti non riflettenti, o le stelle nello spazio cosmico, sono buone approssimazioni di corpo nero. In laboratorio, un corpo nero ideale si realizza costruendo una cavità munita di una piccola apertura dalla quale può uscire la radiazione. In questo caso gli oscillatori elettrici che costituiscono il materiale con il quale è stata costruita la cavità sono costretti a scambiarsi e a ridistribuire le rispettive energie vibrazionali sia per urto che per scambio di fotoni. Questo permette il raggiungimento, all'interno della cavità, di un *equilibrio tra materia e radiazione* detto anche *equilibrio termodinamico*. La piccola apertura da cui esce la radiazione si suppone non influenzare tale equilibrio.

**QUANDO UN GAS IONIZZATO (PLASMA)
ABBASTANZA SPESSE E DENSO RISULTA
OPACO (NON TRASPARENTE) ALLA RADIAZIONE
STESSA, LA RADIAZIONE EMERGE SOLO DA
UNA IDEALE SUPERFICIE CHE CHIAMEREMO
FOTO-SUPERFICIE. NELLE STELLE ESSA E'
DETTA FOTOSFERA.**



Spettro continuo

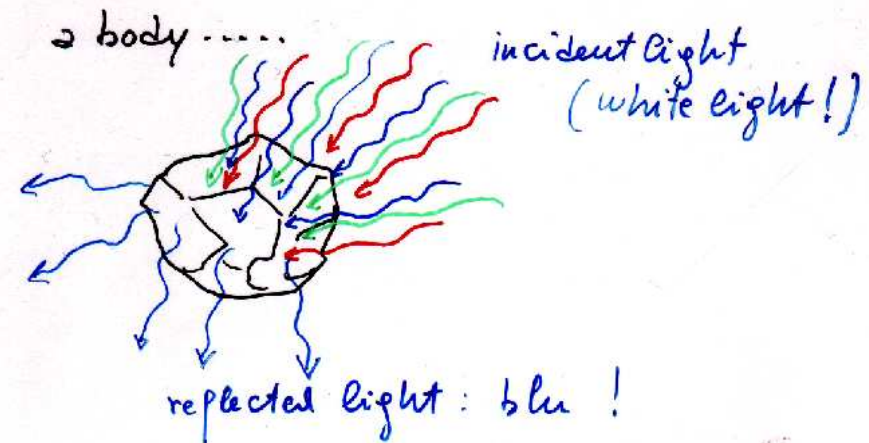
**DALL'ESTERNO NON OSSERVEREMO PIU'
RIGHE DI EMISSIONE, RADIAZIONE DI
BREMSSTRAHLUNG O DI CICLOTRONE,
MA QUALCOSA DI MOLTO DIVERSO :
LO SPETTRO DI CORPO NERO**

**UN CORPO SI DICE NERO QUANDO NON
RIFLETTE LA LUCE DI SORGENTI ESTERNE
IL CARBONE, E IL NERO FUMO, SONO NERI
PERCHE' LA LORO STRUTTURA MICROSCOPICA
E' COSTITUITA DA TANTE CAVITA' CHE
'INTRAPPOLANO' LA LUCE CHE ARRIVA.
QUINDI, SE ILLUMINATI, TENDONO A
SCALDARSI PIUTTOSTO CHE RIFLETTERE.**

**GLI ATOMI E LE MOLECOLE NEI SOLIDI
OSCILLANO PER EFFETTO DELLA
TEMPERATURA EMETTENDO ED ASSORBENDO
RADIAZIONI DI VARIE FREQUENZE: SPETTRO
DI BLACK-BODY!**

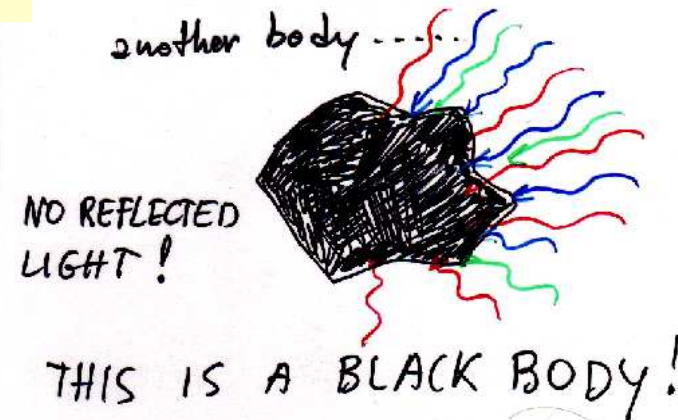
**LO STESSO AVVIENE NEI PLASMI QUANDO
SONO ABBASTANZA DENSII ED OPACHI!**

Un corpo materiale generalmente riflette parte della luce che lo colpisce.

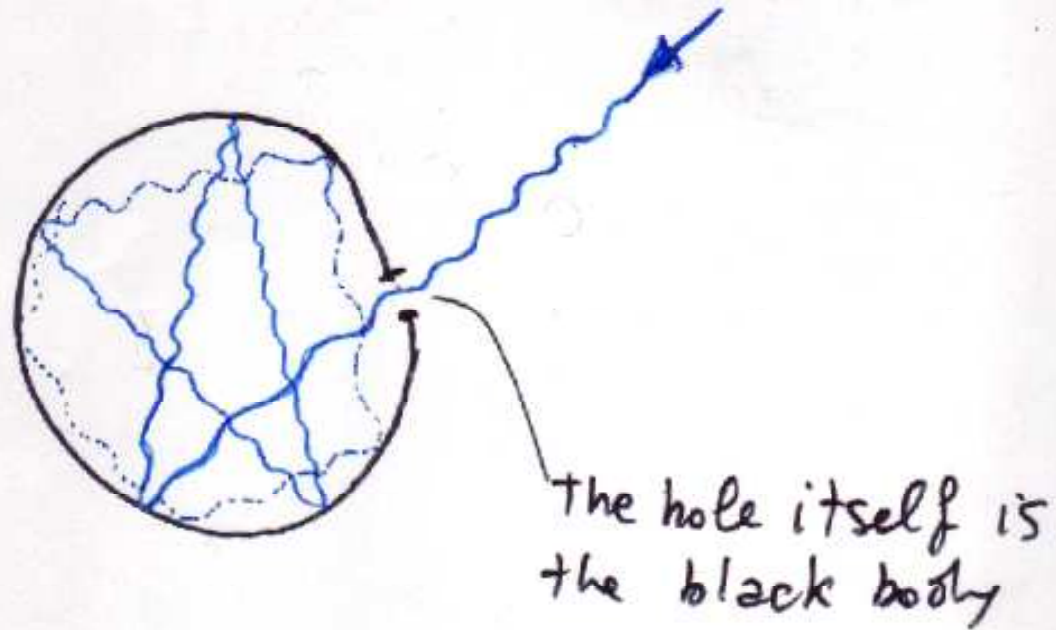


It is not a BLACK BODY! it is blue!

...invece, un corpo nero...

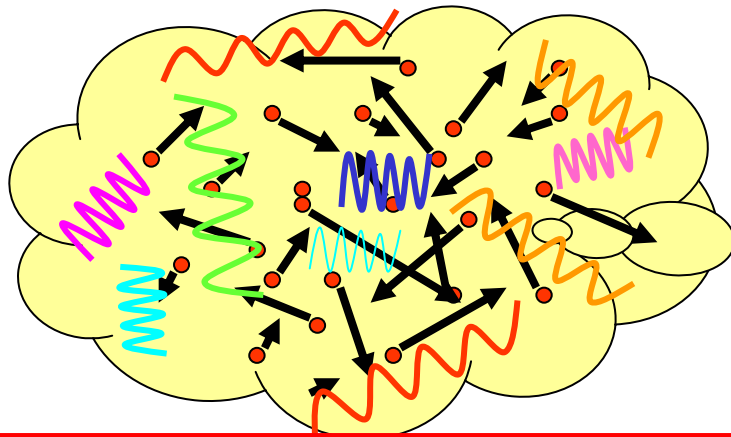


The best way to build a black body
a cavity! + a very little hole!!!

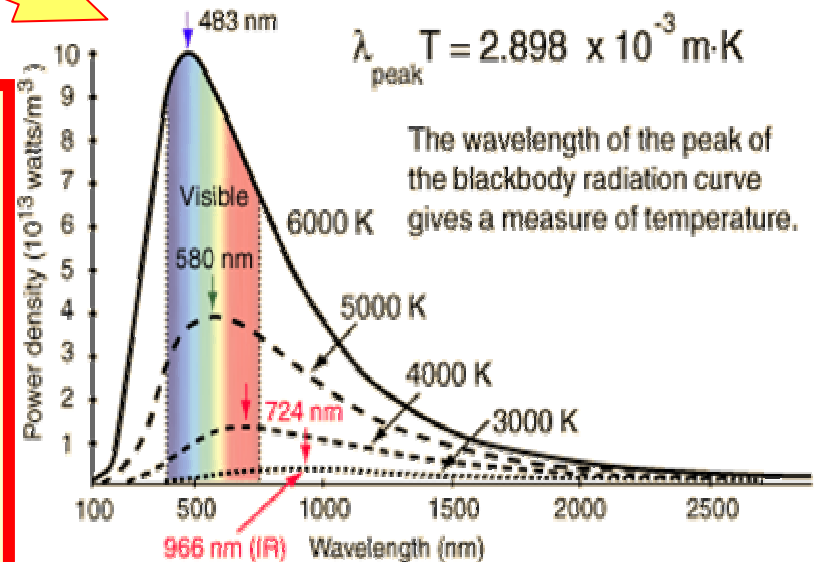


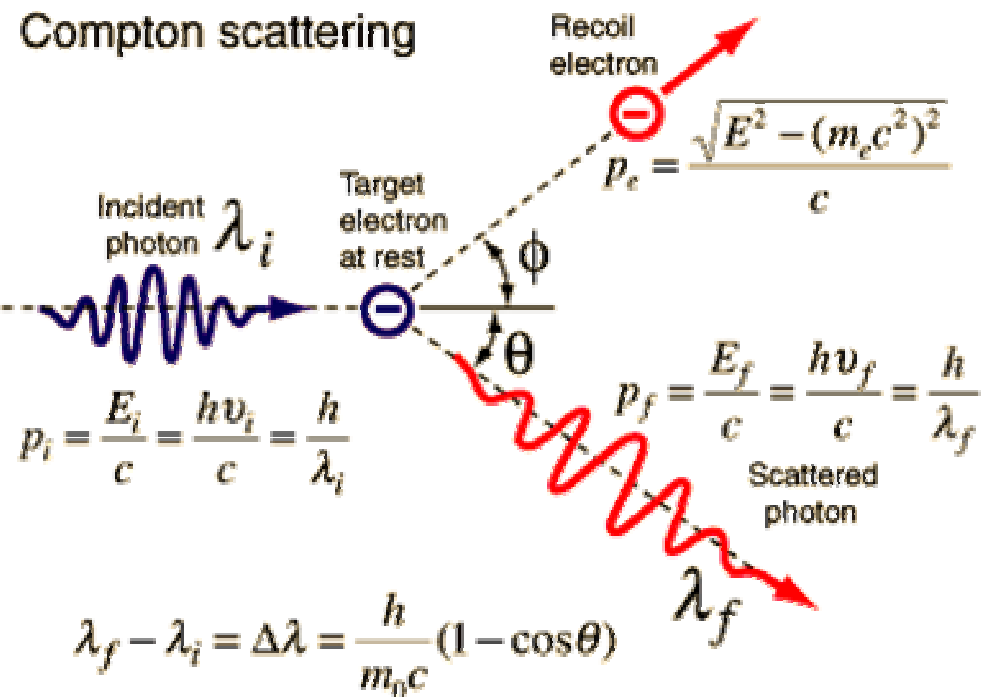
THE BLACK BODY

ANCHE NEI GAS 'OTTICAMENTE SPESSI' LA
FORMA DELLO SPETTRO DI CORPO NERO
 E' DETERMINATA SOPRATUTTO DALLA
QUANTIZZAZIONE DELL'ENERGIA IN
 PACCHETTI D'ONDA, OVVERO DAL FATTO CHE
 L'ENERGIA HA UNA NATURA 'CORPUSCOLARE'
 ESSENDO COMPOSTA
 DA FOTONI DI
 ENERGIA $E=h \times f$



GLI ASSORBIMENTI E
 RIEMISSIONI, E LE MOLTE
 COLLISIONI TRA I FOTONI
 E LE PARTICELLE DEL GAS
 RIPRODUCONO LE CONDIZIONI
 DELLA CAVITA' RISONANTE...



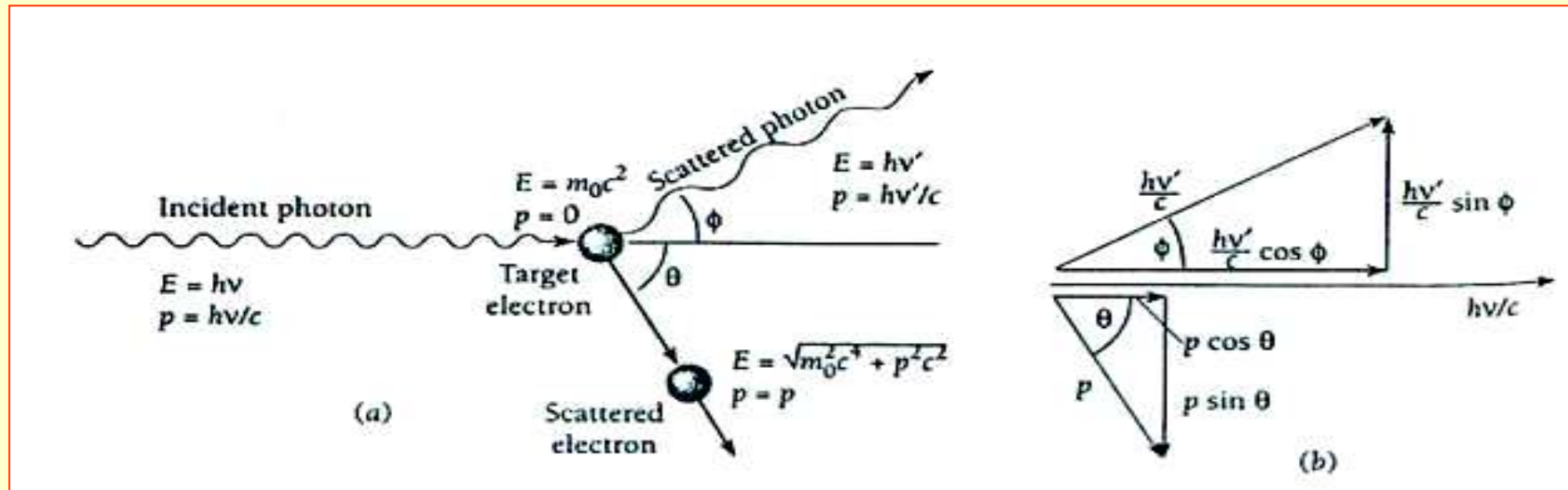


L'espressione precedente per $\Delta\lambda$ può essere ottenuta imponendo la conservazione dell'energia e dell'impulso:

$$h\nu_i + m_e c^2 = h\nu_f + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad \text{conservazione dell'energia}$$

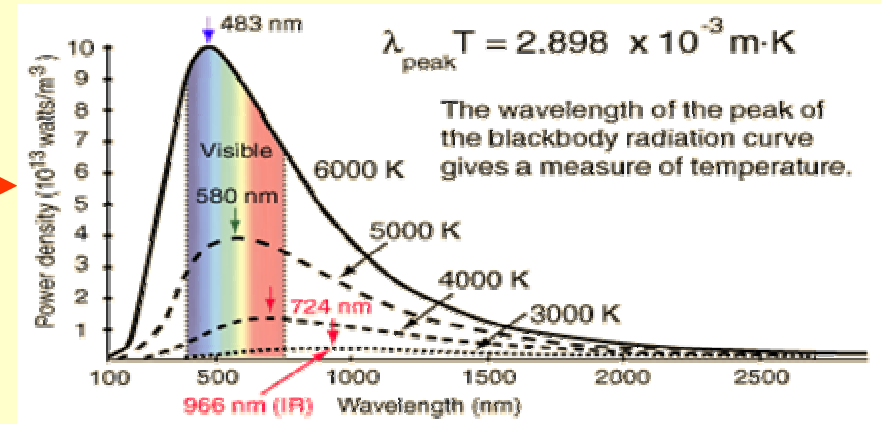
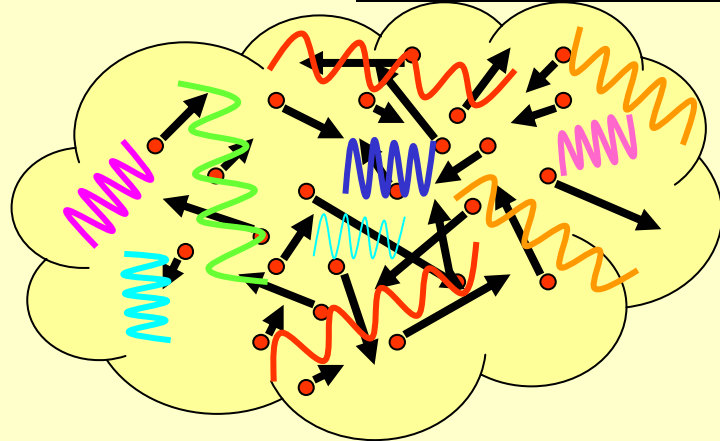
$$\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_e \quad \text{conservazione dell'impulso}$$

SE UN GAS E' OPACO ALLA RADIAZIONE, NON IMPORTA CON QUALE MECCANISMO VENGONO PRODOTTI I FOTONI NEL SUO INTERNO. SE I FOTONI NON POSSONO USCIRE DALLA NUBE E SONO INVECE COSTRETTI A INTERAGIRE CON GLI ELETTRONI LIBERI, SI VERIFICANO MOLTI SCAMBI DI ENERGIA TRA DI ESSI.



I FOTONI E GLI ELETTRONI POSSONO COLLIDERE ELASTICAMENTE. QUINDI, I FOTONI POSSONO PERDERE O ACQUISTARE ENERGIA, AUMENTANDO O DIMINUENDO LA LORO FREQUENZA, A SPESE DELLA ENERGIA CINETICA DEGLI ELETTRONI.

IN QUESTO MODO, SI REALIZZA UNA SPECIE DI EQUILIBRIO TRA LA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITA' DEGLI ELETTRONI E LA DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA (FREQUENZA) DEI FOTONI: IL CAMPO DI RADIAZIONE E' QUINDI IN EQUILIBRIO CON LA MATERIA!

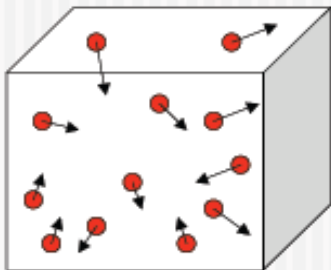
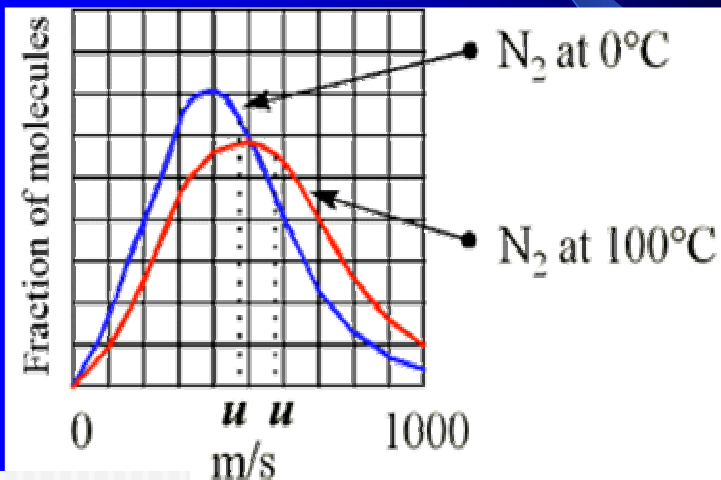


DALL'ESTERNO NON OSSERVEREMO PIU' RIGHE DI EMISSIONE, RADIAZIONE DI BREMSSTRAHLUNG O DI CICLOTRONE, MA QUALCOSA DI MOLTO DIVERSO: OSSERVEREMO LO SPETTRO DI CORPO NERO.

LE DISTRIBUZIONI DELLE ENERGIE DELLE PARTICELLE DI UN GAS E DEI FOTONI DI $B-B$ AL VARIARE DI T

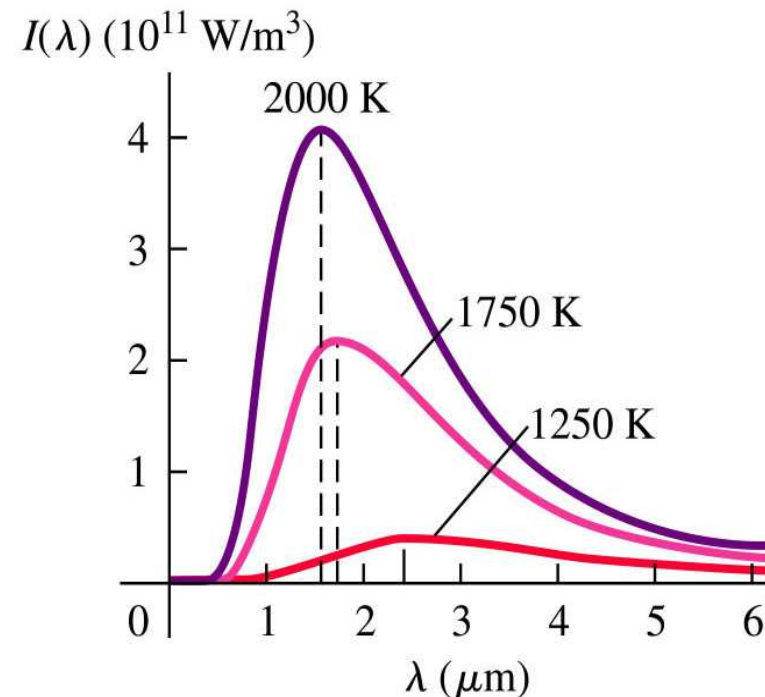
LA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITA' DELLE MOLECOLE DI AZOTO.

LA VELOCITA' PIU' PROBABILE AUMENTA ALL'AUMENTARE DELLA TEMPERATURA



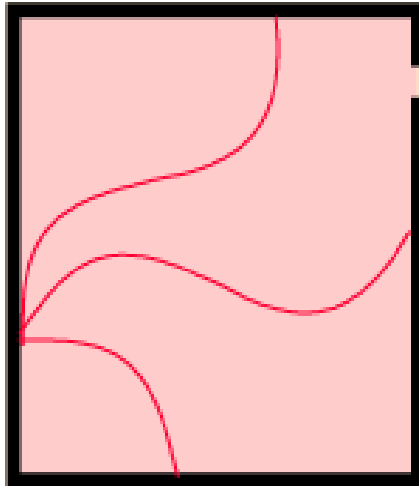
$$\frac{1}{2}Nm\langle u \rangle^2 = \frac{3}{2}NKT$$

LA DISTRIBUZIONE DELLA INTENSITA' DELLA RADIAZIONE DI CORPO NERO. LA LUNGHEZZA D'ONDA DEL PICCO DELLA DISTRIBUZIONE DECRESCe ALL'AUMENTARE DELLA TEMPERATURA.



Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

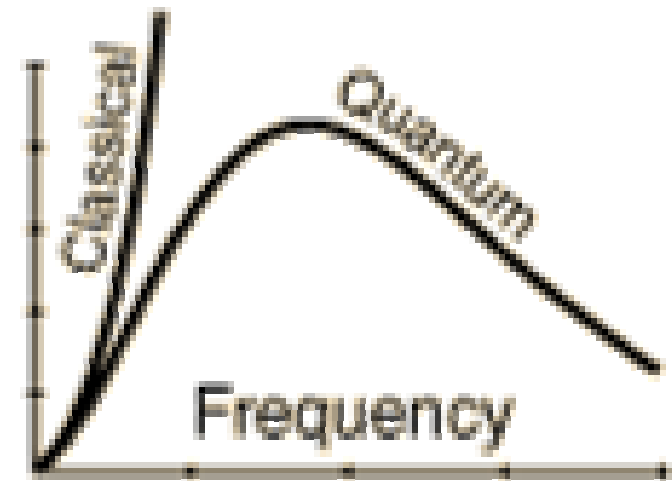
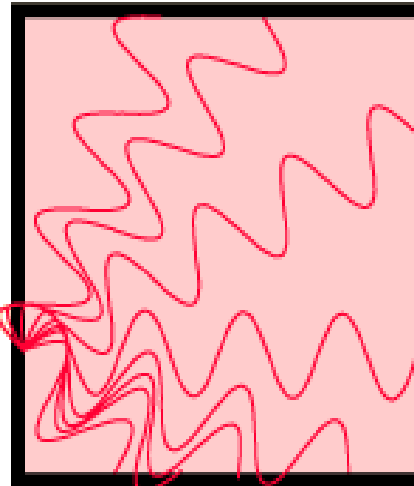
← *frequenza*



Number of modes
per unit frequency
per unit volume

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

For higher frequencies
you can fit more modes
into the cavity. For
double the frequency,
four times as many
modes.

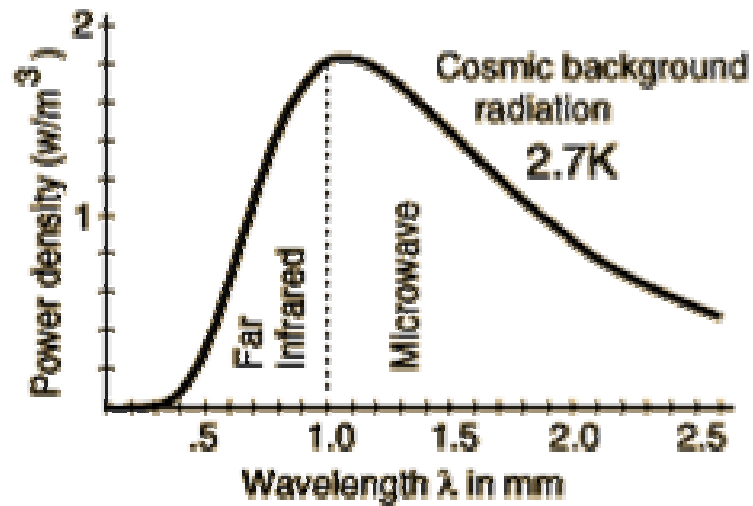
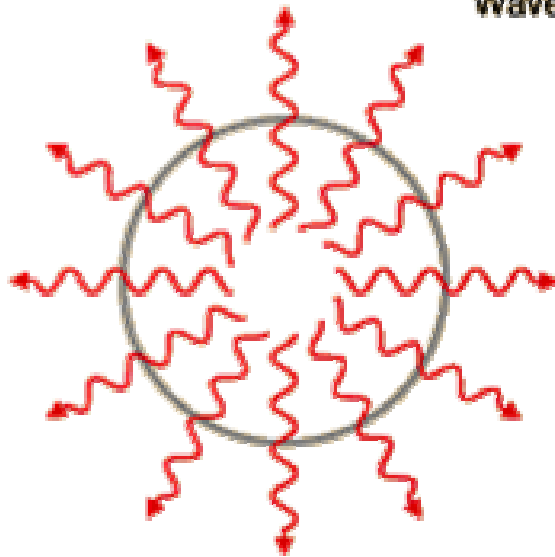
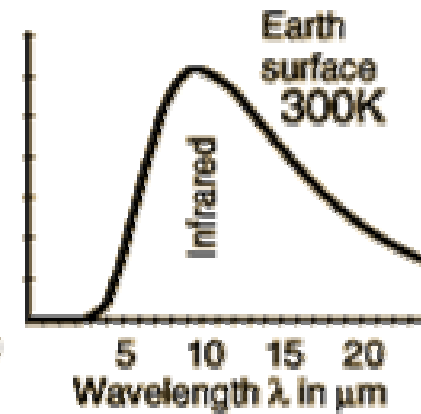
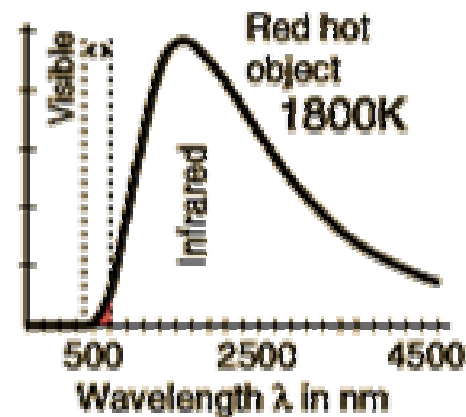
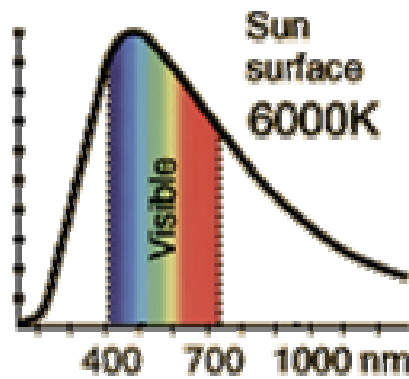


Radiation modes in
a hot cavity provide
a test of quantum theory



	#Modes per unit frequency per unit volume	Probability of occupying modes	Average energy per mode
CLASSICAL	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Equal for all modes	kT
QUANTUM	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Quantized modes: require $h\nu$ energy to excite upper modes, less probable	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

Curve di Radiazione di alcuni 'classici' corpi neri



IL CORPO NERO

Sia $\rho(\nu, T)$ la *densità dell'energia* all'interno della cavità di cui si è parlato sopra (una sfera o un cubo cavi, a pareti isolanti, a temperatura T , provvisti di un piccolo foro dal quale esce energia senza turbare l'equilibrio interno). Essendo il campo di radiazione *isotropo*, le onde elettromagnetiche dovranno attraversare lo spazio lungo tutte le direzioni possibili. Perciò, se la pressione di radiazione che un treno d'onde esercita su una superficie perpendicolare al moto dell'onda è data da $P_{rad} = S/c = (uc)/c = u$, in questo caso, se $\rho(\nu, T)$ è la densità di energia del campo isotropo, la pressione di radiazione sarà espressa come

$$P_{rad} = 1/3\rho(\nu, T) \quad (5.15)$$

mentre la potenza emessa per steradiante é

$$B(\nu, T)d\nu = \frac{1}{4}c\rho(\nu, T)d\nu \quad (5.16)$$

Ora, se gli stati energetici degli oscillatori fossero popolati secondo la statistica di Boltzmann, il numero di oscillatori con energia compresa tra ϵ ed $\epsilon + d\epsilon$ sarebbe:

$$N(\epsilon)d\epsilon = \frac{N}{KT}e^{-\epsilon/KT}d\epsilon \quad (5.17)$$

Da questa espressione si ricava che l'energia media $\bar{\epsilon}$ deve essere

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} N(\epsilon)\epsilon d\epsilon}{N} = KT \quad (5.18)$$

Ora, si può dimostrare che se $\bar{\epsilon}$ è l'energia media irradiata dagli oscillatori di frequenza ν , allora la densità dell'energia deve essere

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\nu^2}{c^3} \bar{\epsilon}(\nu, T) \quad (5.19)$$

Sostituendo il valore di $\bar{\epsilon}$ ottenuto per gli oscillatori classici l'espressione della densità dell'energia emessa diventa

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\nu^2 KT}{c^3} d\nu \quad (\text{formula di Lord Rayleigh e Jeans}) \quad (5.20)$$

che rappresenta una parabola che indica un continuo aumento dell'energia emessa all'aumentare della frequenza. Ma questo era in totale disaccordo con le curve sperimentali, alle quali essa si adegua soltanto per piccoli valori di ν (ossia per grandi lunghezze d'onda). Evidentemente doveva esserci qualche errore di principio nel calcolo.

Nel 1900, Planck riuscì a risolvere il problema ipotizzando che un oscillatore armonico lineare di frequenza di risonanza ν_0 potesse assumere, e quindi emettere, soltanto energie E_1, E_2, \dots, E_n espresse dalla relazione

$$E_n = nh\nu \quad (5.21)$$

con n intero positivo e $h = 6.62 \times 10^{-27}$ *erg.s* detta *costante di Planck*.

E' importante notare che qui non si tratta di *quantizzare* l'energia nel senso che si era dato alle transizioni tra i livelli energetici di un atomo. In quel caso, solo alcune energie, corrispondenti a ben determinate frequenze, erano possibili. Qui, invece, tutte le frequenze sono possibili (non a caso stiamo trattando uno spettro continuo della radiazione), ma per ogni frequenza, la quantità globale di energia può solo essere un multiplo intero, n , dell'energia del singolo fotone $h\nu$.

Con tale ipotesi, nel calcolo dell'energia media, in luogo dell'integrale si introduce una sommatoria, giungendo dopo qualche passaggio all'espressione

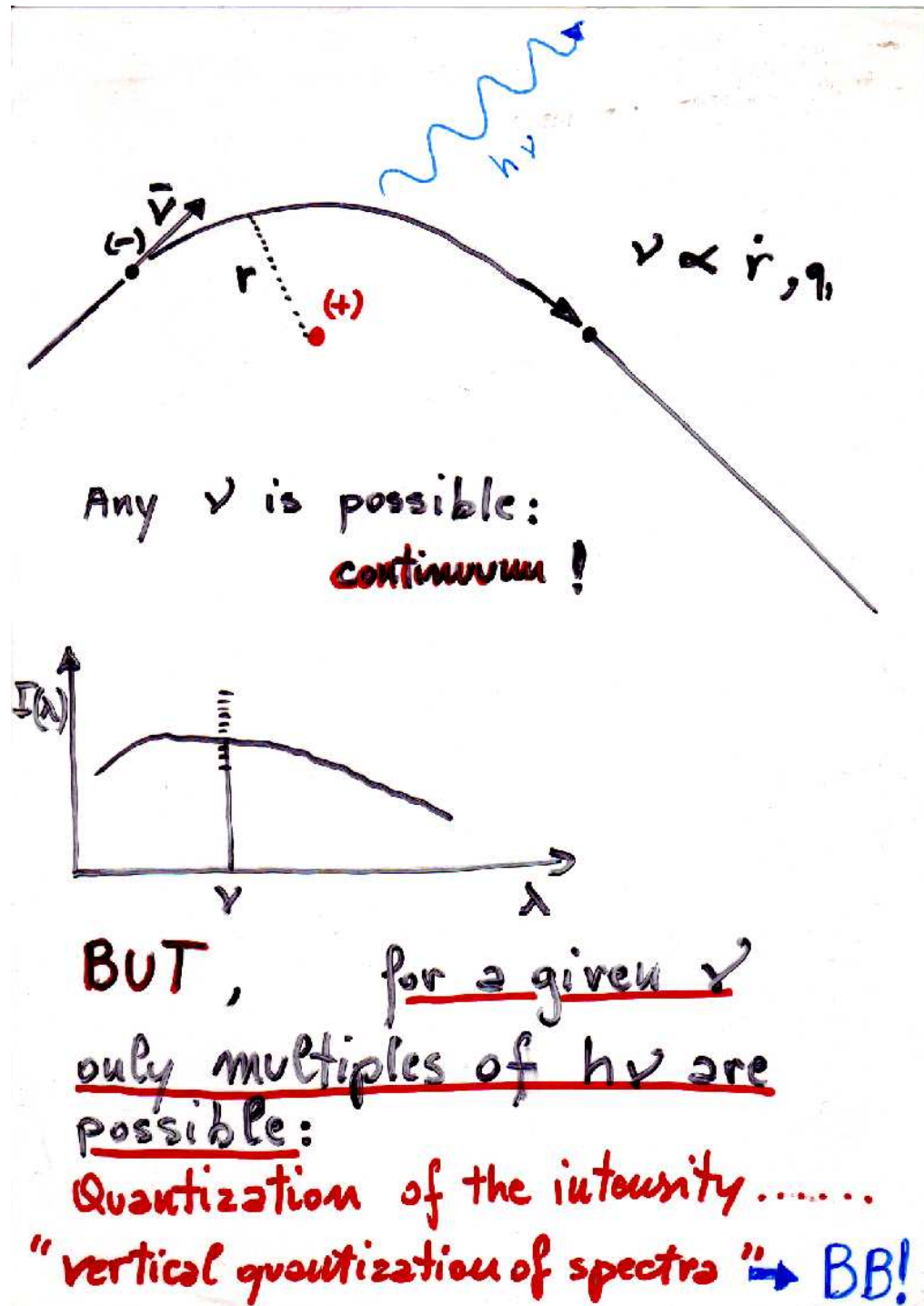
$$\bar{\epsilon} = h\nu / (e^{h\nu/KT} - 1) \quad (5.22)$$

che sostituita nella $\rho(\nu, T)$ e tenuto conto che la radiazione emessa da un corpo nero è $B(\nu, T)d\nu = c/4\rho(\nu, T)d\nu$, otteniamo

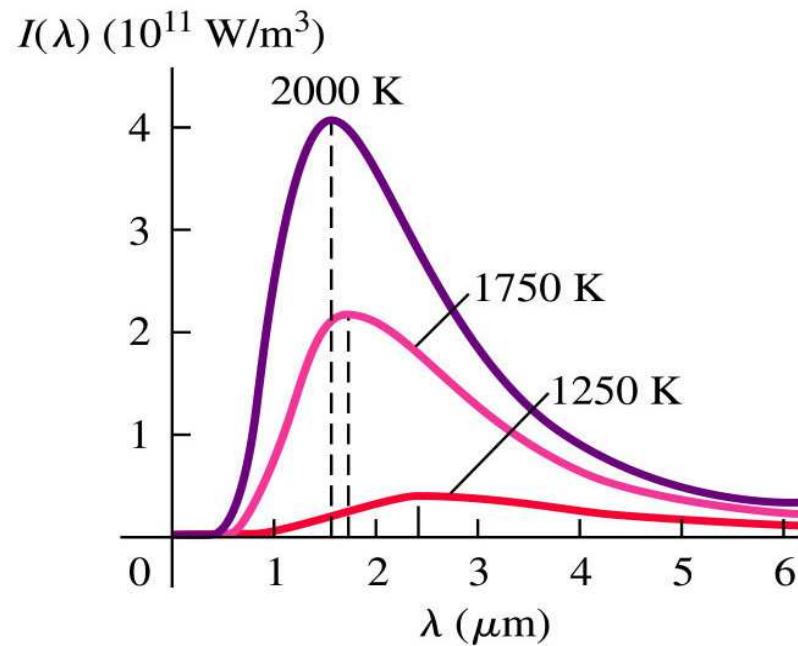
$$B(\nu, T)d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/KT} - 1)}d\nu \quad (5.23)$$

Questa espressione risulta in perfetto accordo con le curve sperimentali.

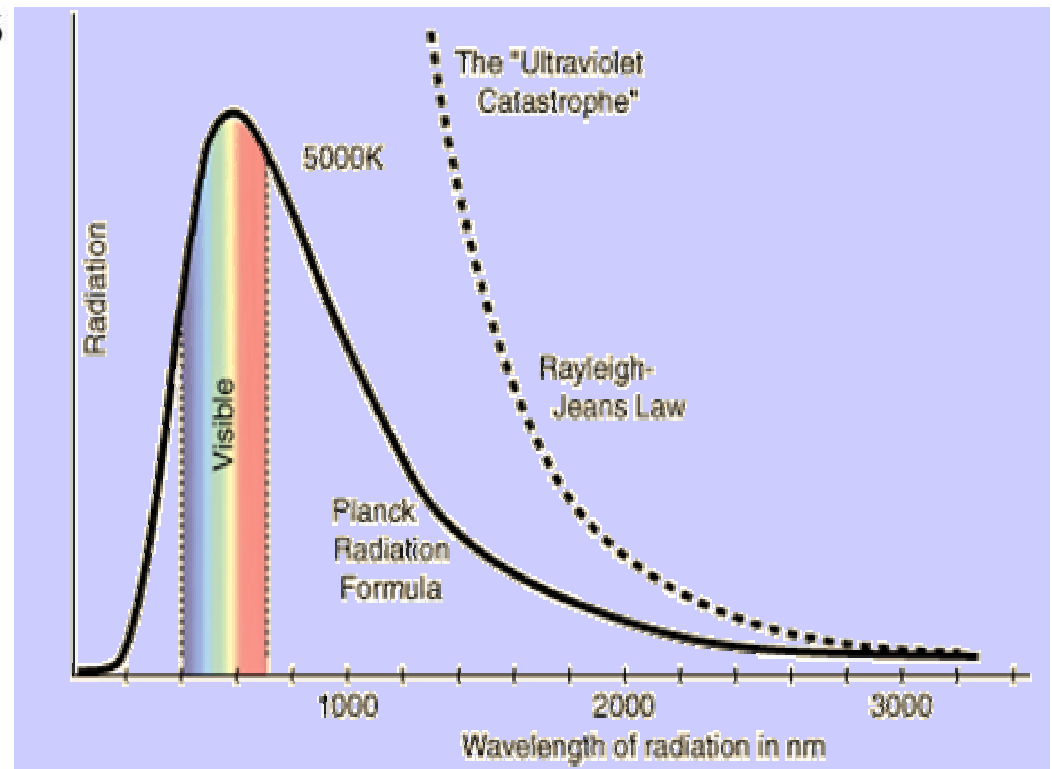
Significato della
quantizzazione verticale



La distribuzione di Planck: lo spettro di corpo nero



Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.



Ricapitoliamo usando λ al posto di ν .

La formula di Planck descrive bene lo spettro di radiazione emesso dal "corpo nero" :

$$B(\lambda, T)d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \quad (5.27)$$

Unità di misura: $erg/cm^2/s/Angstrom/sr^{-2}$

L'intensità integrata su tutte le frequenze è

$$B(T) = \frac{2\pi^4 K^4 T^4}{15c^2 h^3} = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (5.28)$$

dove $\sigma = 5.67 \times 10^{-5}$ è la costante di Stefan-Boltzmann.

Unità di misura: $erg/cm^2/s/sr^{-2}$

La densità totale di energia del campo di radiazione è

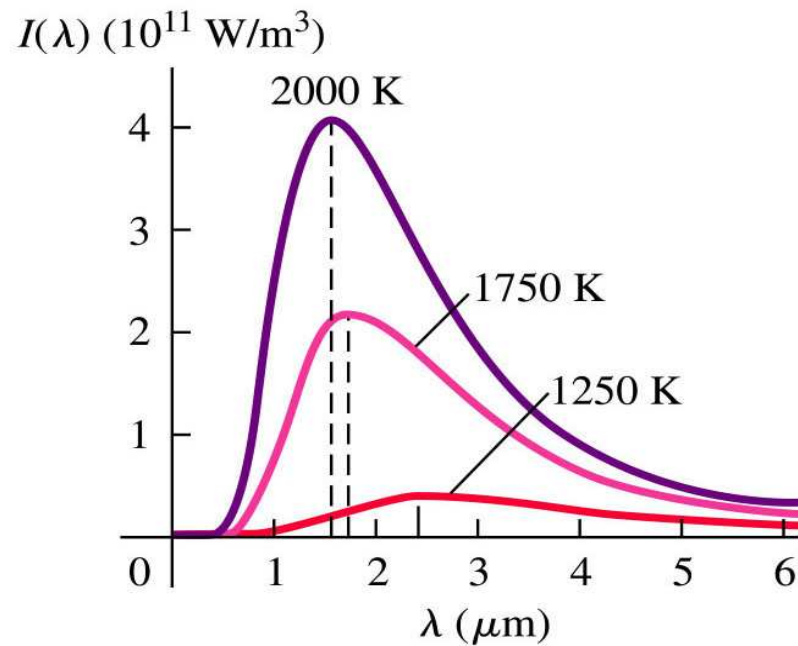
$$U = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4 \quad (5.29)$$

dove $a = (8\pi^5 K^4 / 15c^3 h^3) = 7.56 \times 10^{-15} erg cm^{-1} K^{-4}$
è la costante della densità di radiazione (erg/cm^3).

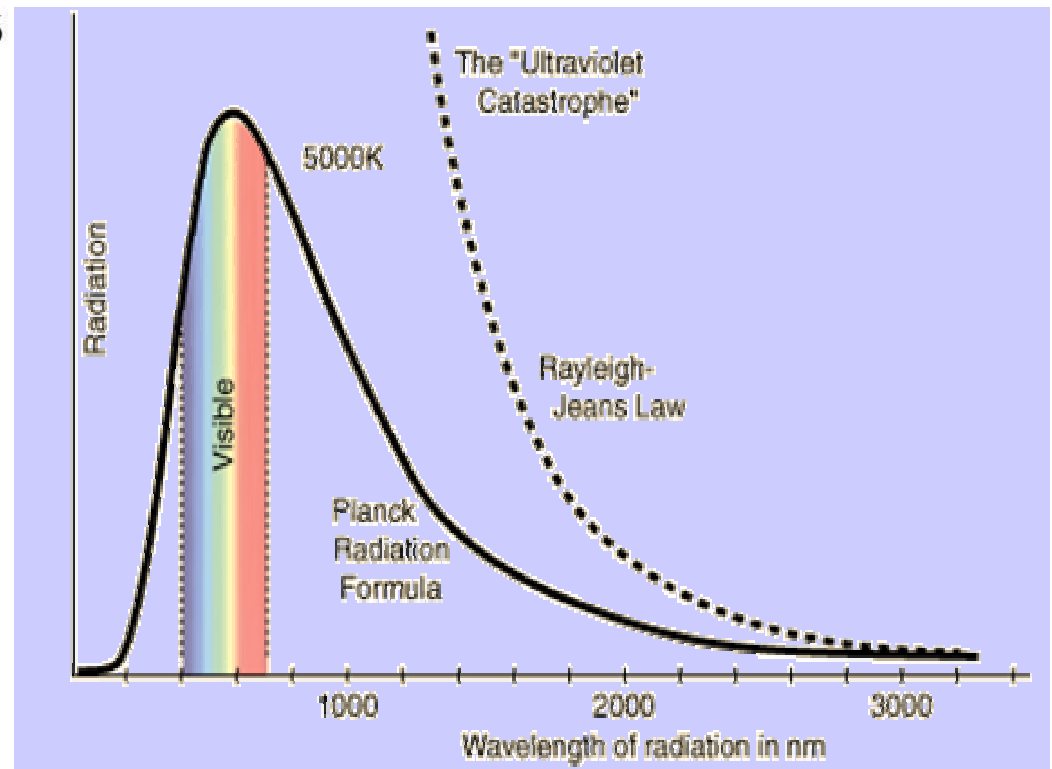
La legge dello spostamento di Wien mostra come il picco della planckiana si sposti verso le lunghezze d'onda più brevi al crescere della temperatura:

$$\lambda_{max} = \frac{2.9 \times 10^7}{T} \quad Angstroms \quad (5.30)$$

La distribuzione di Planck: lo spettro di corpo nero



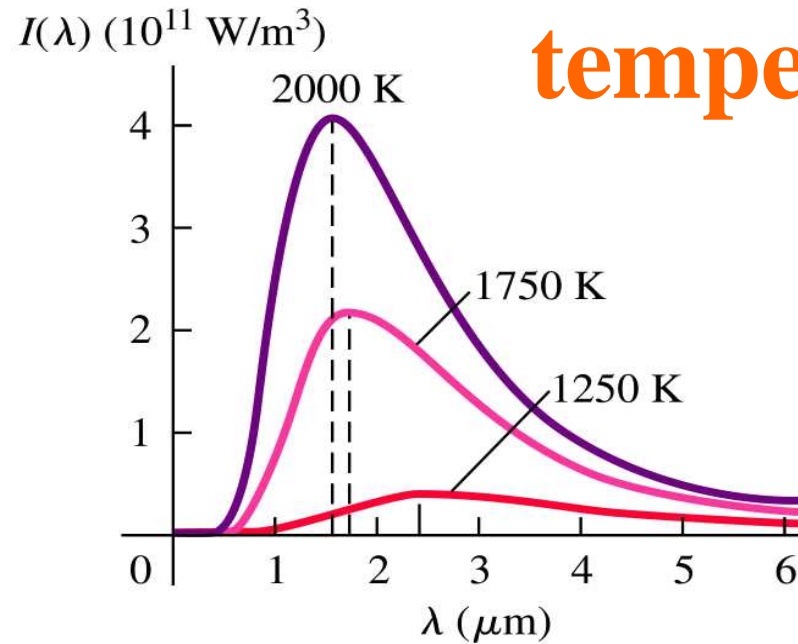
Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.



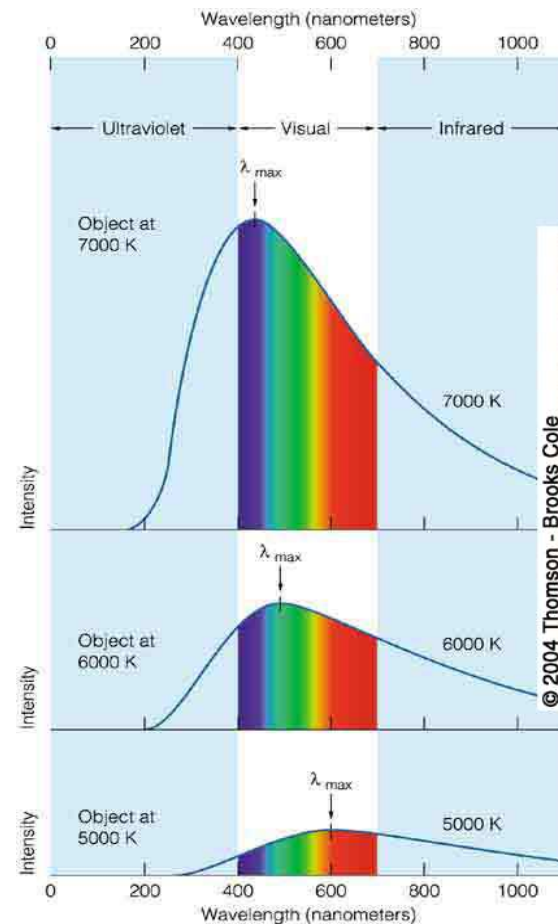
Le stelle emettono spettri continui che assomigliano a quello di corpo nero di temperatura uguale a quella della loro fotosfera. Si definisce *temperatura effettiva* T_{eff} di una stella quella temperatura che deve avere un corpo nero di superficie emittente pari a quella della stella per emettere tutta l'energia emessa dalla stella stessa. In pratica, se L è l'energia globalmente emessa al secondo da una stella di raggio R , varrà la relazione

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (5.31)$$

il colore di una stella rivela la sua temperatura di corpo nero



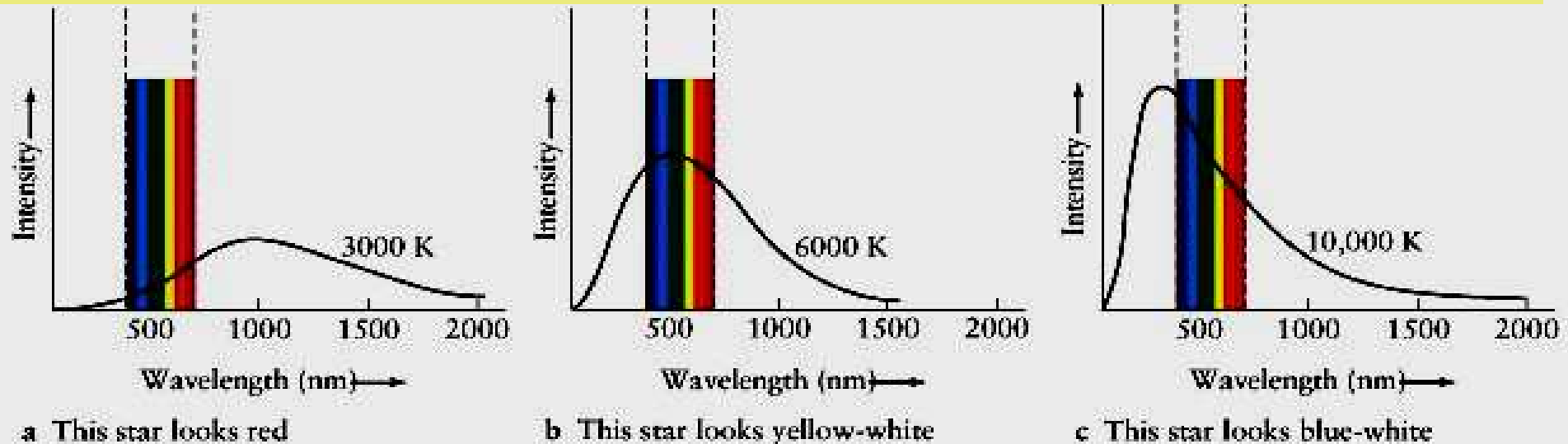
Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.



Slide 7

Fig. 6-6, p. 98

Il colore di una stella rivela la sua **temperatura di corpo nero** (= *Black Body* = *BB*)

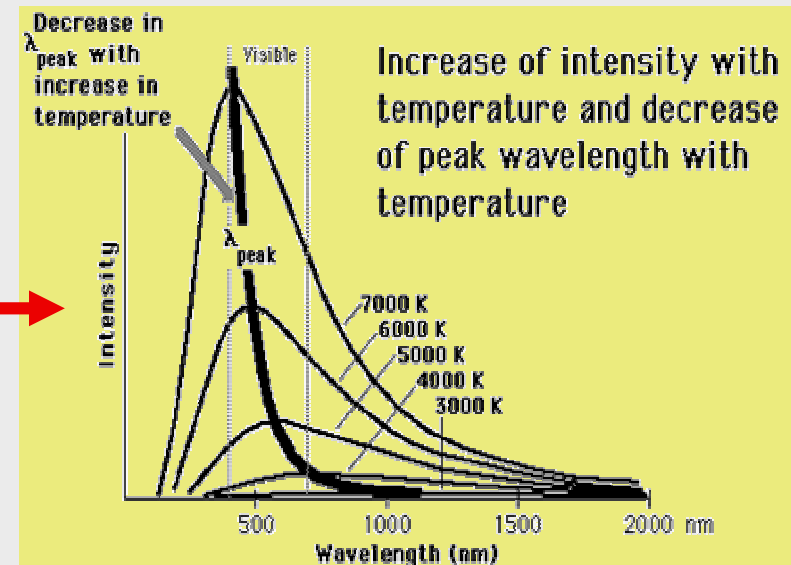


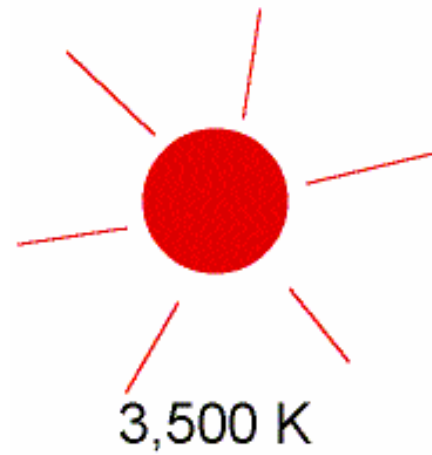
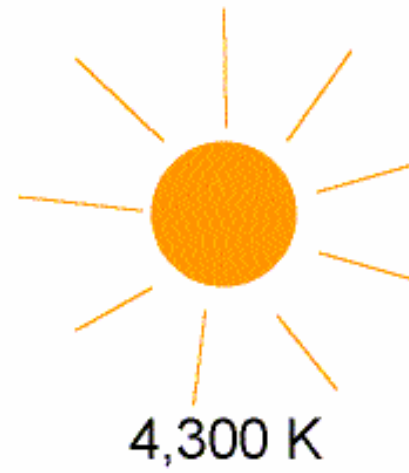
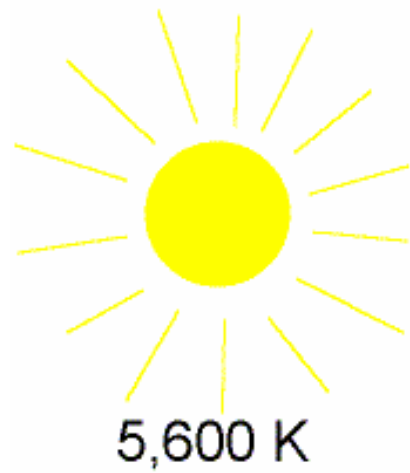
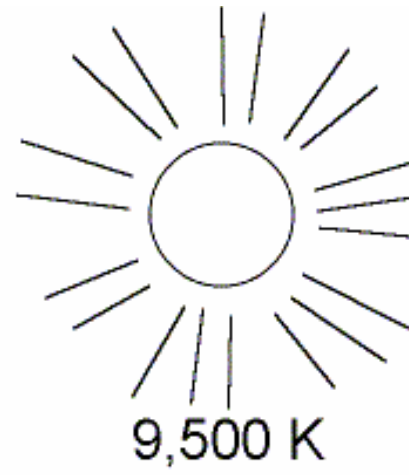
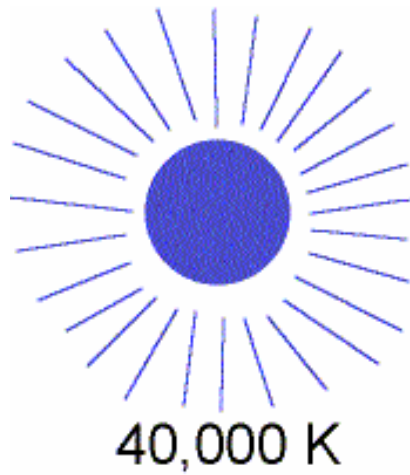
Dalla formula di Planck si ricavano anche le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien, già note sperimentalmente,:

$$Q = \sigma T^4 \quad \text{legge di Stefan - Boltzmann}$$

$$\lambda_m T = 0.289789 \text{ cm deg} \quad \text{legge degli spostamenti di Wien}$$

$$B_{max} = \gamma T^5 \quad \text{legge del valor massimo di Wien}$$





Le stelle più calde appaiono più blu; le più fredde appaiono rosse

Una volta determinata la temperatura effettiva di una stella, se ne conosciamo la distanza d , da misure di parallasse annua, dalla curva di luce di binarie ad eclisse, etc. , possiamo determinare la luminosità assoluta dell'astro

$$L = 4\pi d^2 I_{bol} \quad (5.32)$$

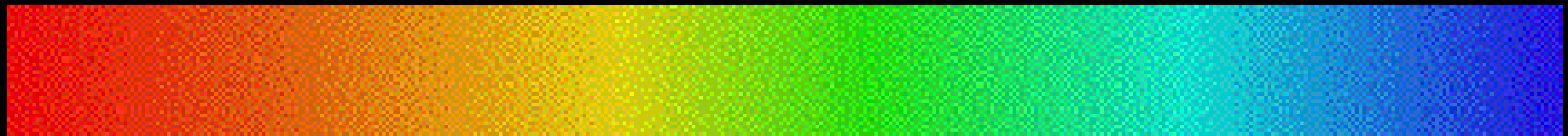
dove I_{bol} è il flusso ricevuto per unità di tempo e di superficie, detto *irradianza*. In questo caso consideriamo un flusso *bolometrico*, ovvero integrato su tutte le frequenze. Per capire meglio, diciamo che per misurare l'irradianza di una stella, potremmo raccogliere la sua luce con un telescopio di area A , e porre sul suo fuoco, diciamo, un bicchiere di acqua. Misurando, dopo l'intervallo di tempo T (*tempo di esposizione*) l'aumento di temperatura dell'acqua, si può calcolare l'energia raccolta che divisa per A e T dà l'irradianza.

Una volta calcolata L possiamo determinare il raggio R della stella usando ancora la solita $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$.

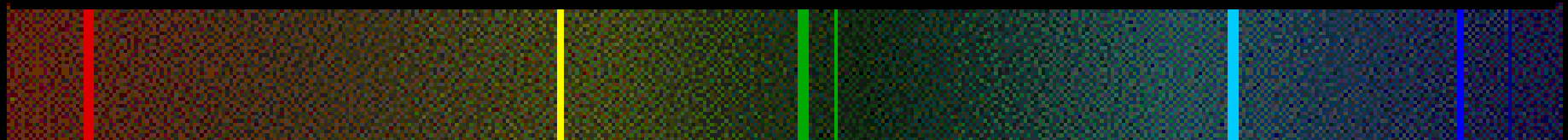
GLI SPETTRI STELLARI SONO QUINDI COSTITUITI DA UNA EMISSIONE CONTINUA (DISTRIBUITA SU TUTTE LE FREQUENZE), DETTA CONTINUO, E DA EMISSIONI MONOCROMATICHE, DETTE RIGHE, DOVUTE AI PROCESSI DI ECCITAZIONE E DISECCITAZIONE CHE AVVENGONO NEGLI ATOMI (NEUTRI O IONIZZATI).

L'INTENSITA' DELLE RIGHE SPETTRALI DIPENDE, PER UNA DATA COMPOSIZIONE CHIMICA, PRINCIPALMENTE DALLA TEMPERATURA...MA UN PO' ANCHE DALLA PRESSIONE DEL GAS.

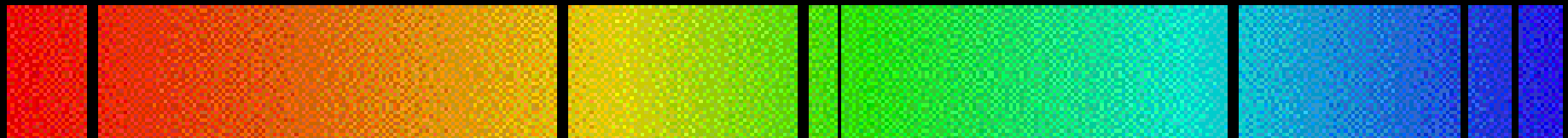
Continuous Spectrum



Emission Spectrum



Absorption Spectrum

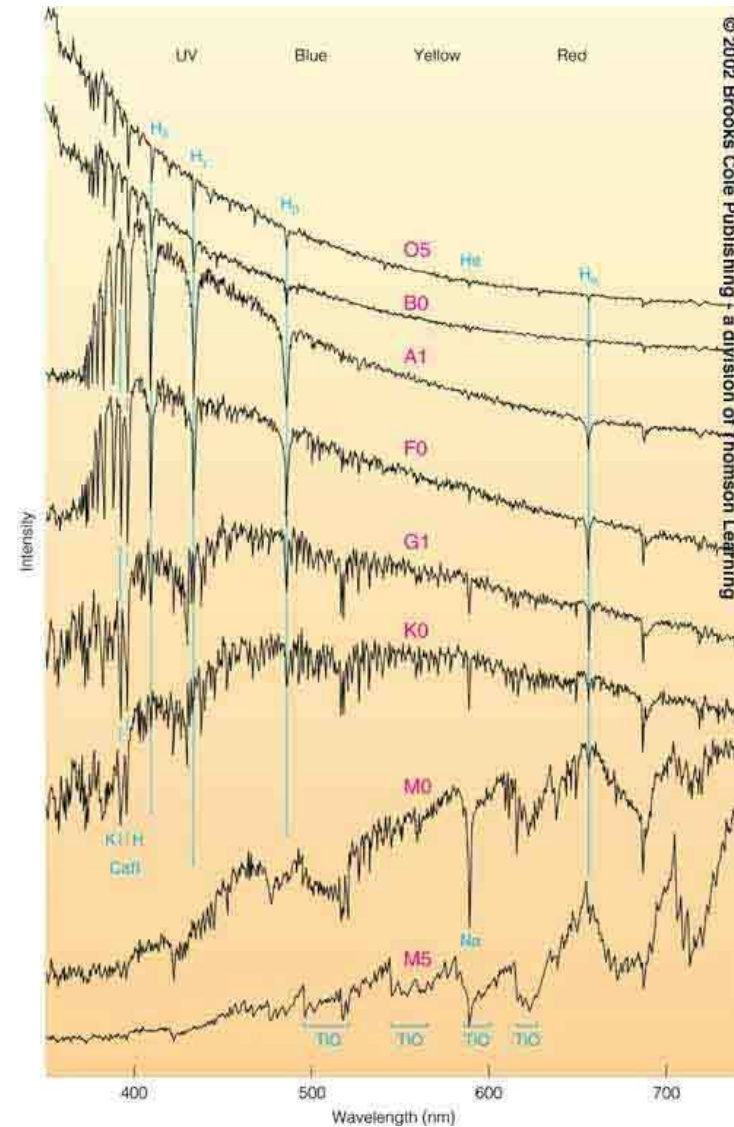


Classification of stars

- **O B A F G K M** scheme
 - Originally in order of H strength – A,B,etc
Above order is for decreasing temperature
 - Standard mnemonic: Oh, Be A Fine Girl (Guy), Kiss Me
 - Use numbers for finer divisions: A0, A1, ... A9, F0, F1, ... F9, G0, G1, ...

Table 6-1 Spectral Classes

Spectral Class	Approximate Temperature (K)	Hydrogen Balmer Lines	Other Spectral Features
O	40,000	Weak	Ionized helium
B	20,000	Medium	Neutral helium
A	10,000	Strong	Ionized calcium weak
F	7500	Medium	Ionized calcium weak
G	5500	Weak	Ionized calcium medium
K	4500	Very weak	Ionized calcium strong
M	3000	Very weak	Titanium oxide strong



From our text: Horizons, by Seeds

LE NEBULE GALATTICHE O CIRCUSTELLARI SPESSO MOSTRANO LA SERIE DI BALMER (H) IN EMISSIONE

