

# Moti propri e velocità radiali

Velocità radiali

Arrossamento gravitazionale

Moti propri

Il moto peculiare del Sole e il Local Standard of Rest

# Vettori posizione e velocità - 1

Da un punto di vista formale, sia  $\mathbf{r}$  è il vettore eliocentrico (o meglio ancora baricentrico) di posizione di una stella all'epoca iniziale  $t_0$ :

$$\mathbf{r}(t_0) = \begin{bmatrix} r_0 \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ r_0 \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ r_0 \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

La distanza in termini della parallasse trigonometrica  $\pi$  è:

$$r_0 = 1 / \sin \pi_0 \approx 1 / \pi_0$$

La posizione della stella a una data seguente  $t_1$ , si ottiene allora da:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t) + (t_1 - t)\dot{\mathbf{r}}$$

almeno per intervalli di tempo non troppo grandi, e purché si intenda che le corrispondenti coordinate celesti sono riferita alla *stessa epoca* (per tener conto di precessione e nutazione).

# Vettori posizione e velocità - 2

Con notazione astronomica, il vettore velocità è:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_0 \cos \delta_0 & -\cos \alpha_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \cos \alpha_0 \cos \delta_0 & -\sin \alpha_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ 0 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \mu_{\alpha 0} \\ r_0 \mu_{\delta 0} \\ \dot{r}_0 \end{bmatrix}$$

dove  $\mu_{\alpha 0}$ ,  $\mu_{\delta 0}$  sono le velocità *angolari* in ascensione retta e declinazione, cioè i cosiddetti *moti propri* in AR e Dec, e  $dr/dt$  la velocità radiale. Si noti la diversa dimensione di moto proprio e velocità radiale, il primo espresso in (unità di angolo/unità di tempo), la seconda espressa in (unità di distanza/unità di tempo). In generale, la conoscenza delle quantità necessarie è incompleta, cosicché di solito siamo costretti a trattare separatamente le velocità e i moti propri. E' anche chiaro che il *sistema dei moti propri è fondamentale legato alla precessione*, con la associata difficoltà di trasformare i cataloghi da un'epoca all'altra.

# Velocità radiali -1

**La velocità radiale si misura per mezzo dell'effetto Doppler**, cioè mediante la variazione in lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione a causa della velocità relativa  $V_r$  lungo la visuale. Le velocità degli oggetti del sistema solare e anche delle stelle della Via Lattea sono in generale così piccole rispetto a quella della luce  $c$  che non si commette errore sensibile usando la formula pre-relativistica:

$$V_r = c \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = cz$$

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = 1 + \frac{V_r}{c} = 1 + z, \quad z = \Delta\lambda / \lambda$$

dove  $\lambda_o$  è la lunghezza d'onda misurata dall'osservatore e  $\lambda_s$  è quella misurata nel riferimento a riposo con la sorgente. L'uso della lettera  $z$  per indicare  $\Delta\lambda/\lambda$  è molto diffuso.

# Velocità radiali -2

Si noti che la velocità radiale può essere positiva ( $z > 0$ , cioè la lunghezza d'onda è spostata verso il rosso, o *red-shifted*), o negativa ( $z < 0$ , dunque la lunghezza d'onda è spostata verso il blue, *blue-shifted*).

Se la velocità supera all'incirca  $0.01c$ , allora si deve usare la formula della Relatività Ristretta (o Speciale). E' più vantaggioso in tal caso usare frequenze  $\nu$  che lunghezze d'onda  $\lambda$ . Nel vuoto :

$$\nu = c / \lambda \quad , \quad d\nu = -cd\lambda / \lambda^2$$

La formula classica è:  $1 + z = \nu_s / \nu_o$

Quella relativistica è:  $\nu_o = \nu_s \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (1 - \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^{-1}$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale al fronte d'onda. La Relatività Speciale prevede dunque sia un effetto Doppler radiale che un effetto Doppler *trasverso* (quando  $\mathbf{n}$  è perpendicolare a  $\mathbf{V}$ ), che non c'è nella formula pre-relativistica. In altre parole, nell'effetto Doppler entra tutto il vettore velocità, e non solo la componente radiale.

# Velocità radiali - 3

Dopo semplici passaggi, deriviamo:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = -1 + \frac{1 + \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad 1 + z = 1 + \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{1 + \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$\beta = V/c$ , e l'angolo  $\alpha = \pi - \theta$  è l'angolo tra la visuale e il vettore velocità di S.

Se la velocità è tutta radiale:

$$v_o = v_s \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_s} = -1 + \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \approx \frac{V}{c} + \frac{1}{2} \left( \frac{V}{c} \right)^2 + \dots$$

che differisce da quella classica per termini  $(V/c)^2$  e superiori.

# Velocità radiali nel Sistema Solare

Nel Sistema Solare prevalgono velocità di poche decine di km/s, con la notevole eccezione di comete e asteroidi che passino radenti alla superficie solare, dato che la velocità di fuga dal Sole è di oltre 600 km/s.

Tuttavia, bisogna tenere in considerazione che le velocità radiali dei satelliti artificiali (magari in orbita attorno a un pianeta) sono note con precisione altissima, diciamo 1 mm/s.

Quindi per una navigazione accurata è necessario usare la Relatività Generale per esprimere correttamente la metrica dello spazio-tempo, come viene fatto ad es. nelle effemeridi del Jet Propulsion Laboratory.

# Velocità radiali delle stelle

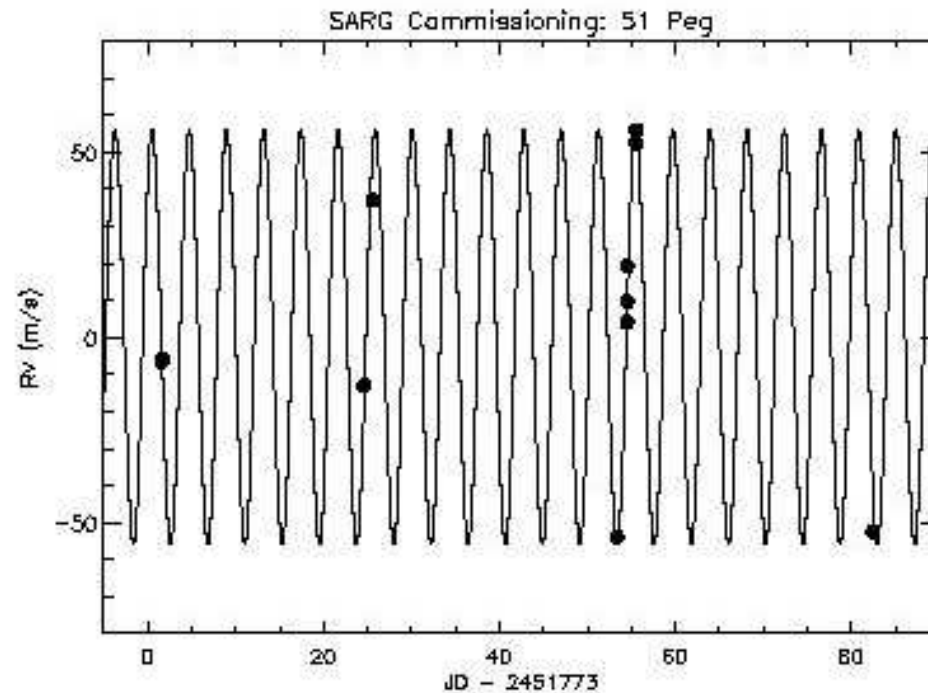
Le velocità radiali delle stelle nella Via Lattea raramente raggiungono 500 km/s; tra le più vicine al Sole, difficilmente si superano i 50 km/s, con la notevole eccezione di un gruppo di *stelle a alta velocità*, tra cui la stella di Barnard, che si muove con  $V_r = -108$  km/s rispetto al Sole.

La precisione delle misure in genere non arriva a 100 m/s; solo con tecniche particolarissime si possono ottenere precisioni migliori di 5 m/s (precisione indispensabile per la scoperta di pianeti extra-solari dalle velocità radiali). Il limite alla precisione ottenibile è posto da un lato dalle limitazioni sperimentali, dall'altro dalla intrinseca struttura delle righe spettrali, affette ad es. dalla turbolenza dell'atmosfera stellare.

*Dunque la formula classica è usualmente adeguata.* Ci sono però casi in cui le velocità sono molto alte, ad es. per la peculiarissima stella **SS 433**, o per gli inviluppi in espansione delle stelle *novae*, in cui si osservano velocità radiali di molte migliaia di km/s.



# Variazioni di velocità radiale indotte da un pianeta



Lo spettrografo a alta risoluzione SARG del TNG è impegnato nella ricerca di pianeti extrasolari per mezzo della variazione di velocità radiali. La precisione richiesta è di pochi m/s.

# Velocità radiali delle galassie

Per le galassie, al di là di una distanza che grosso modo coincide con quello dell'Ammasso in Vergine, e la cui velocità radiale è di circa +1000 km/s, si incontrano solo velocità radiali *positive* (per galassie più vicine, ad es. M31 in Andromeda, si possono trovare valori negativi). Le righe spettrali delle galassie distanti e di altri oggetti a distanza cosmologica come i Quasars, o QSOs), sono sempre 'red-shifted', di una quantità  $z_c$  crescente con la distanza, come fu scoperto da E. Hubble nel 1930.

Questa constatazione è alla base di tutta la Cosmologia, e viene indicato come *espansione dell'Universo*. Si sono già osservati valori di  $z_c$  fino a circa 10 (a questo redshift, la riga spettrale dell'Idrogeno Lyman- $\alpha$ , con  $\lambda_s = 1216 \text{ \AA}$  in laboratorio, è osservata a  $\lambda_o = 11 \cdot 1216 \text{ \AA}$ ). Naturalmente per derivare la velocità radiale si dovrebbe usare la formula relativistica. Tuttavia, in Cosmologia viene meno la semplice relazione tra distanza e velocità, dato che la velocità di espansione non è quella di una sorgente in moto in uno spazio fermo, ma è proprio quello di espansione della metrica stessa che è un continuo spazio-temporale. Pertanto è meglio considerare queste velocità come 'velocità indicative'.

# Arrossamento gravitazionale

La Relatività Generale predice un altro tipo di 'red-shift' per la luce emessa da una sorgente immersa in un forte campo gravitazionale, ad es. dalla superficie di una stella. A grande distanza da una sorgente sferica di massa  $M$  e raggio  $R$ , l'arrossamento gravitazionale è:

$$z_g = -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} \approx \frac{GM}{c^2 R} = \frac{r_s}{2R}$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale, e  $r_s$  è il raggio di Schwarzschild. Sul Sole, l'effetto ammonta a 0.64 km/s. Sulla nana bianca Sirio B, che ha massa circa come quella solare ma raggio solo 80% di quello della Terra, l'effetto è corrispondentemente molto maggiore. La misura dell'arrossamento gravitazionale delle Nane Bianche costituisce dunque un altro test (ma abbastanza impreciso causa la larghezza delle righe) della correttezza della Relatività Generale.

# Somma dei vari effetti

Se un dato oggetto mostra tutti i suddetti effetti di arrossamento, quello cinematico, cosmologico e gravitazionale, la combinazione è:

$$1 + z_{\text{tot}} = (1 + z_v)(1 + z_c)(1 + z_g) \approx z_v + z_c + z_g$$

dove l'ultima approssimata eguaglianza è vera solo per piccoli redshift.

# Come si misura $V_r$ - 1

Prima di tutto, si devono correggere le osservazioni per il moto annuo e diurno dell'osservatore. Le formule necessarie sono facilmente derivabili se la precisione voluta è inferiore a 100 m/s. Infatti la velocità eliocentrica della terra varia tra 29.3 km/s all'afelio e 30.3 km/s al perielio; la sua proiezione verso una direzione di coordinate eclittiche  $(\lambda, \beta)$  è:

$$V_{\oplus} = -V_K \cos \beta [\sin(\lambda - \lambda_{\odot}) + e \sin(\lambda_{\Pi} - \lambda)]$$

dove:

$V_K = 29.79$  km/s,  $\lambda_{\odot}$  è la longitudine del Sole in quella data,

$\lambda_{\Pi}$  è la longitudine del perigeo (circa 18h48m),

$e$  è l'eccentricità dell'orbita terrestre (circa 1/60).

Si noti che il termine in eccentricità, che vale al massimo circa 0.50 km/s, è praticamente costante nel corso dell'anno.

# Come si misura $V_r$ - 2

Un altro modo di esprimere questa correzione fa uso delle coordinate equatoriali della visuale, e delle componenti cartesiane della velocità terrestre, che sono fornite in UA/giorno per ciascun giorno dall'*Astronomical Almanac*:

$$V_{\oplus} = 1731.5(\dot{X} \cos \alpha \cos \delta + \dot{Y} \sin \alpha \cos \delta + \dot{Z} \sin \delta) \quad (\text{km/s})$$

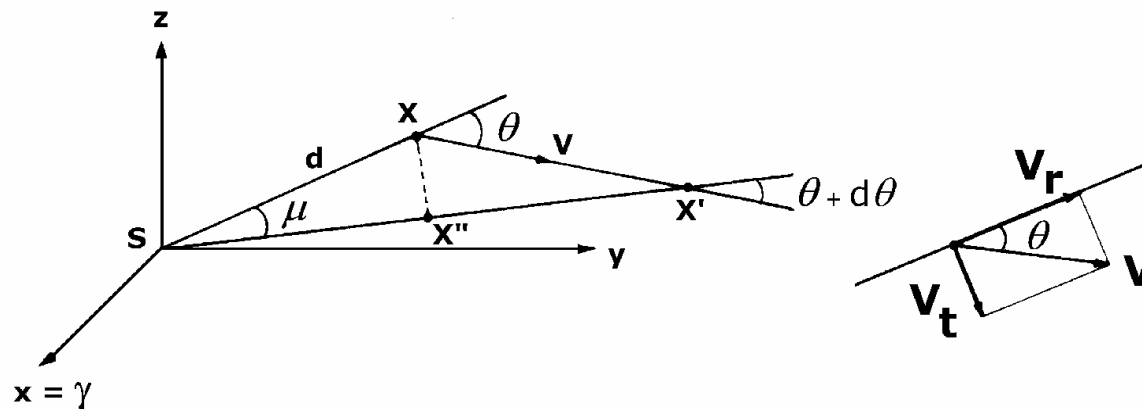
Per quanto riguarda la rotazione diurna, la velocità dell'osservatore equatoriale è circa 0.465 km/s: dunque per la generica latitudine geocentrica  $\phi'$  la proiezione di questa velocità sulla visuale per la stella di declinazione  $\delta$  e Angolo Orario  $HA$  è:

$$V_{rot} = 0.465 \cos \phi' \cos \delta \sin HA \quad (\text{km/s})$$

Se si volessero precisioni migliori di 10 m/s, si dovrebbero usare formule più raffinate e tener conto anche della velocità del Sole nel riferimento baricentrico (di circa 12 m/s).

# I moti propri - 1

Consideriamo dapprima i moti propri delle stelle vicine. Sia  $S$  l'osservatore eliocentrico, e  $X$  una generica stella a distanza  $d$  e velocità eliocentrica  $\mathbf{V}$ , a una certa data (vedi Figura). A causa delle enormi distanze, per molti decenni o secoli la velocità eliocentrica si può considerare *rettilinea e uniforme* (con la possibile eccezione di stelle come la Barnard). Esprimendo il modulo in km/s, e indicando con  $n$  il numero di secondi in un anno, dopo un anno la stella verrà osservata in  $X'$ , dopo aver percorso il cammino  $V \cdot n$  km lungo una direzione facente l'incognito angolo  $\theta$  con l'asse  $SX$ . Sul piano tangente alla volta celeste la stella si sarà mossa del piccolo angolo  $\mu$ :



$$\mu = n \frac{V}{d} \sin \theta \quad \text{rad}$$

# I moti propri - 2

La componente di  $\mathbf{V}$  perpendicolare alla linea di vista, cioè  $V_t$ , è detta velocità *trasversa*, o *tangenziale*. La corrispondente *velocità angolare*  $\mu$  si dice *moto proprio* della stella X, e viene generalmente espressa in arcsec/anno, o arcsec/secolo. Usando la parallasse  $\pi$  in arcsec invece della distanza  $d$  in km, e considerando gli appropriate fattori di conversione (cioè: 1 km/s = 0.21095 UA/anno, 1 UA/anno = 4.74045 km/s), deriviamo:

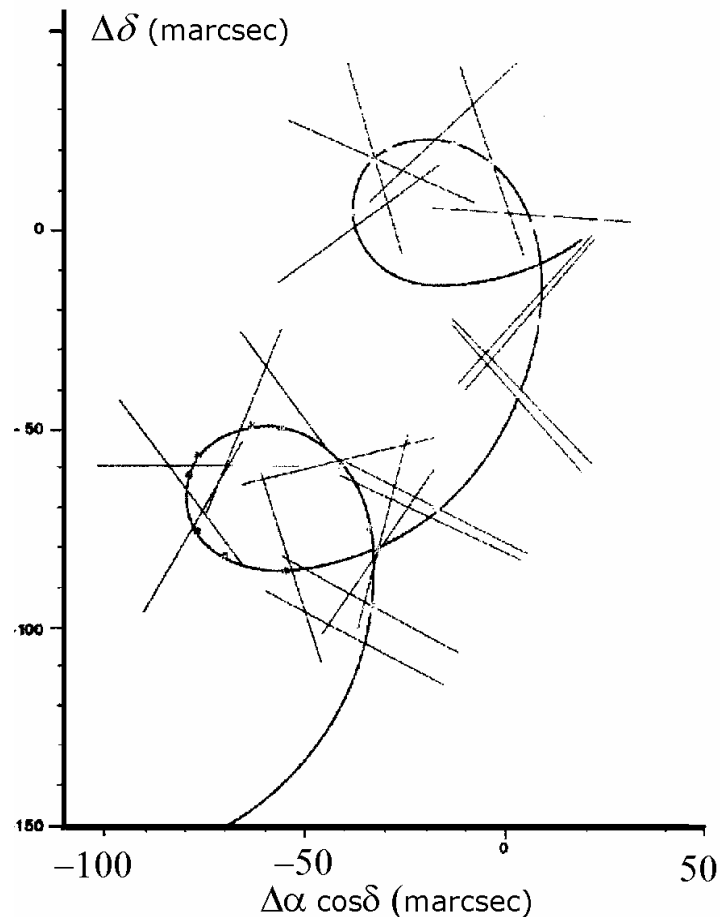
$$V_t = V \sin \theta = 4.740 \frac{\mu}{\pi} \text{ km/s} \quad , \quad \mu = \frac{\pi}{4.740} V_t \text{ arcsec/anno}$$

La stella di Barnard ha il maggior moto proprio conosciuto, 10"/anno; pochissime stelle hanno  $\mu > 2$ "/anno. Ovviamente le stelle più vicine tendono ad avere il moto proprio maggiore, ma *il viceversa non è necessariamente vero*, a causa della arbitraria orientazione nello spazio del loro vettore velocità.



# I moti propri - 3

Per le stelle più vicine, la parallasse annua è trascinata dal moto proprio, come si vede in Figura :



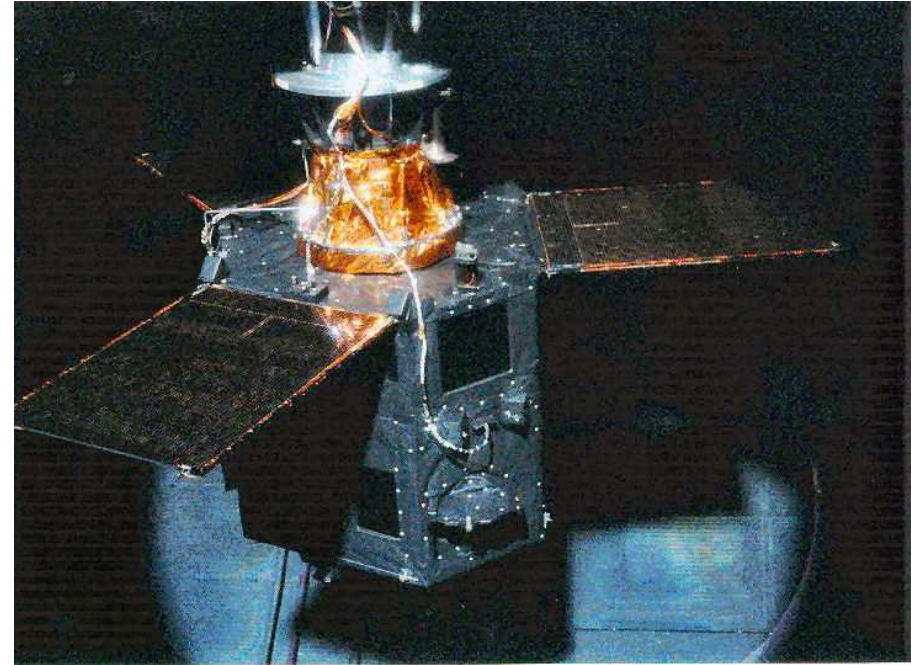
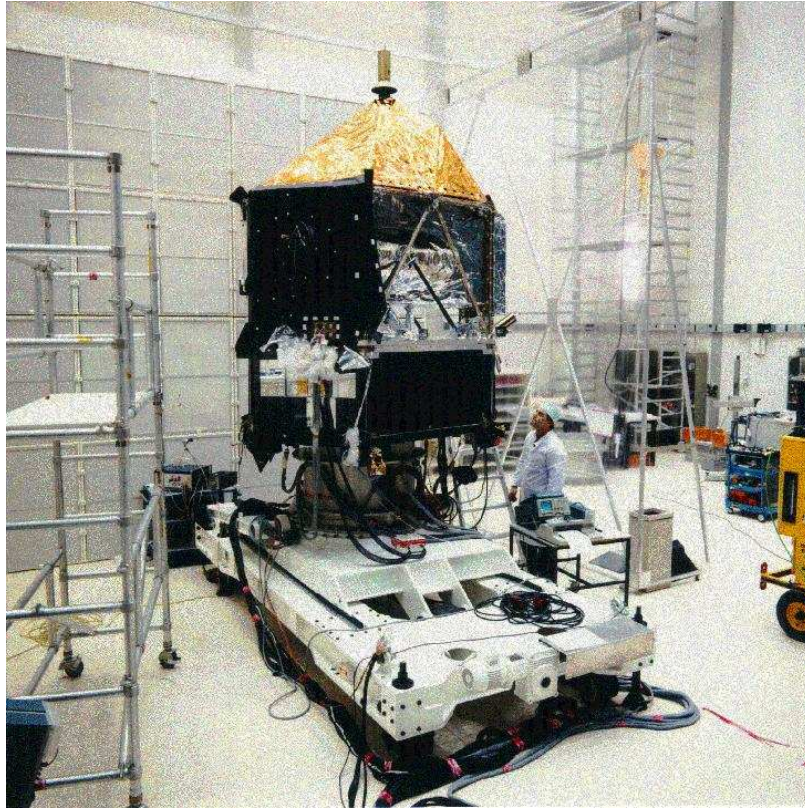
Il moto proprio pari a:

$$\mu = 0''.03 \text{ /anno}$$

trascina l'ellisse di parallasse della stella vicina ( $\pi = 0''.08$ )

(figura tratta dai dati del satellite Hipparcos: i segmenti danno le posizioni istantanee con il relativo errore, la linea continua è il cammino di 'best fit').

# La missione Hipparcos



<http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/>  
*v. anche versione inglese per i dettagli.*

Il satellite fu lanciato da Kourou (Guyana francese) l'8 agosto 1989 verso l'orbita geostazionaria. Tuttavia il lancio non riuscì perfettamente, e Hipparcos si mise su un'orbita fortemente ellittica. La durata della missione fu così più corta del previsto, per cui il satellite non poté misurare moti propri con la precisione sperata.

# Moti propri più velocità radiali

Se della stella X si conoscesse anche la velocità radiale dall'effetto Doppler (non relativistico) :

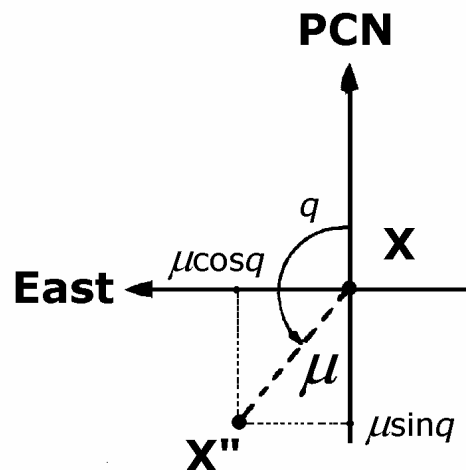
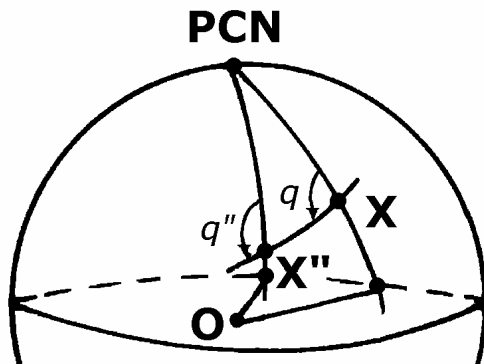
$$V_r = V \cos \theta = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 4.740 \frac{\mu}{\pi} \cot \theta \quad \text{km/s}$$

allora si potrebbe ricostruire il vettore ‘velocità eliocentrica’ *nelle sue tre componenti*, quindi sia come modulo che come direzione.

Ma *per la grande maggioranza dei casi* conosciamo i moti propri, cioè le velocità angolari tangenziali in arcsec per anno, e magari anche le velocità radiali in km/s, ma *non* le parallassi.

# Moti propri come vettori - 1

E' conveniente considerare il moto proprio come un vettore  $\mu(\mu, q)$  sul piano tangente alla sfera celeste, con modulo  $\mu$  espresso in unità angolari (arcsec/anno) lungo il cerchio massimo  $XX''$ , e direzione espresso dall'angolo di posizione  $q$  misurato da Nord verso Est ( $0^\circ \leq q < 360^\circ$ ). Alternativamente, si possono dare le due componenti equatoriali ( $\mu_\alpha, \mu_\delta$ ); si deve fare attenzione *alle unità di  $\mu_\alpha$* , perché le distanze angolari tra due posizioni successive della stella si devono misurare lungo il cerchio massimo passante per  $XX''$ , ma spesso  $\mu_\alpha$  si deriva dalla differenze tra due Ascensioni Rette successive.



$$\mu_\alpha (^s / y) = \frac{1}{15} \mu (^{\prime\prime} / y) \sin q \sec \delta$$

$$\mu_\alpha (^{\prime\prime} / y) = 15 \mu (^s / y) \cos \delta$$

$$\mu_\delta (^{\prime\prime} / y) = \mu (^{\prime\prime} / y) \cos q$$

$$\tan q = \frac{\mu_\alpha (^{\prime\prime} / y)}{\mu_\delta (^{\prime\prime} / y)}$$

# Moti propri come vettori - 2

Alla stessa maniera, le componenti della velocità tangenziale sono:

$$V_{t_\alpha} = 4.740 \frac{\mu_\alpha ("/y)}{\pi} \quad , \quad V_{t_\delta} = 4.740 \frac{\mu_\delta ("/y)}{\pi} \quad \text{km/s}$$

$$\mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2} = \frac{\pi}{4.74} \sqrt{V_{t_\alpha}^2 + V_{t_\delta}^2} \quad , \quad \tan q = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\delta} = \frac{V_{t_\alpha}}{V_{t_\delta}}$$

cioè l'angolo di posizione dei moti propri è **lo stesso** di quello della velocità tangenziale, ed è indipendente dalla parallasse della stella. Di nuovo con riferimento alla figura precedente, dal triangolo sferico XNCPX' notiamo che:

$$\cos \delta \sin q = \cos \delta' \sin q'$$

cioè che quella quantità si conserva durante il movimento della stella, e dunque:

$$\frac{d}{dt} (\cos \delta \sin q) = 0 \quad , \quad \dot{q} = \tan q \tan \delta \dot{\delta}$$



# Effetto dei moti propri sulle coordinate equatoriali

Per determinare l'effetto del moto proprio sulle coordinate di una data stella, per piccoli intervalli di tempo basteranno formule approssimate al primo ordine; le coordinate medie dopo  $T$  anni dall'epoca iniziale  $t_0$  saranno:

$$\alpha(t_0 + T) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha T + (m + n \sin \alpha \tan \delta) T \quad , \quad \delta(t_0 + T) = \delta(t_0) + \mu_\delta T + (n \cos \alpha) T$$

una formula che include la precessione luni-solare (il segno di  $T$  si può ovviamente cambiare), e facendo la debita attenzione alle unità di misura. Tuttavia, per essere rigorosi si deve notare che  **$(\mu_\alpha, \mu_\delta)$  variano nel tempo anche se la velocità è rettilinea e costante**. Ciò per due ragioni distinte: 1) il sistema di riferimento ruota a causa della precessione; 2) la prospettiva altera la lunghezza apparente di archi uguali, come si vede dalla figura.

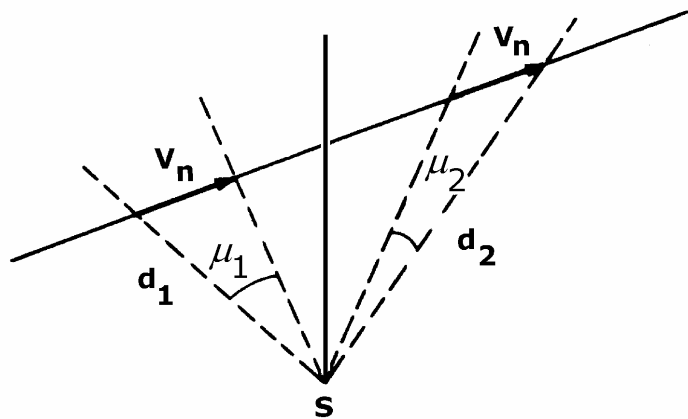


Figura: *accelerazione prospettica* di una stella in *moto uniforme*. Il moto proprio cambia nel tempo anche se il vettore  $\mathbf{V}$  rimane costante. *L'effetto prospettico è ovviamente presente anche nelle velocità radiali.*

# Derivate del moto proprio

Consideriamo i termini successivi in  $\alpha(t)$ ,  $\delta(t)$ :

$$\alpha(t_0 + T) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha T + (m + n \sin \alpha \tan \delta)T + \frac{1}{2} \dot{\mu}_\alpha T^2$$

$$\delta(t_0 + T) = \delta(t_0) + \mu_\delta T + (n \cos \alpha)T + \frac{1}{2} \dot{\mu}_\delta T^2$$

Le derivate di  $(\mu_\alpha, \mu_\delta)$  sono composte di *due termini*: a) un termine dovuto alla *precessione*, indipendente dalla velocità radiale e distanza, ed è chiaramente il termine dominante; b) un termine dovuto alla *variazione prospettica della proiezione della velocità* sulla visuale, e che si può scrivere esplicitamente solo se si conoscono parallasse e velocità radiale.

Le componenti dovute alla precessione chiaramente modificano solo la *direzione* di  $\mu$ , ma non il suo modulo.

# Variazione della distanza

A proposito del secondo termine intrinseco, ricordando che tutte le derivate devono essere in unità circolari, abbiamo:

$$\dot{\pi} = -\frac{\pi^2 V_r}{4.740} \qquad \dot{\mu} = \frac{V}{4.74} [\dot{\pi} \sin q + \pi \cos q \dot{q}]$$

La seconda relazione può essere proiettata in AR e DEC, purché si conoscano la velocità radiale e la parallasse.

Si noterà che se potessimo misurare la variazione di parallasse avremmo una misura della velocità radiale *indipendente da osservazioni spettroscopiche!*



# Relazione tra moti propri e costanti di precessione

La precedente discussione mostra che le incertezze sulle costanti di precessione entrano in quelle del *sistema* dei moti propri. Ad esempio, l'incertezza dell'FK5 è una rotazione spuria a livello di  $0''.15/\text{secolo}$ . Questo piccolo errore sistematico entra nella conoscenza del campo *dei moti e delle forze della Via Lattea*.

Dall'altro lato, un buon modello di distribuzione dei moti propri può migliorare la conoscenza delle costanti precessionali. Il satellite Hipparcos non ha potuto produrre un grande miglioramento, perché ha operato pochi anni.

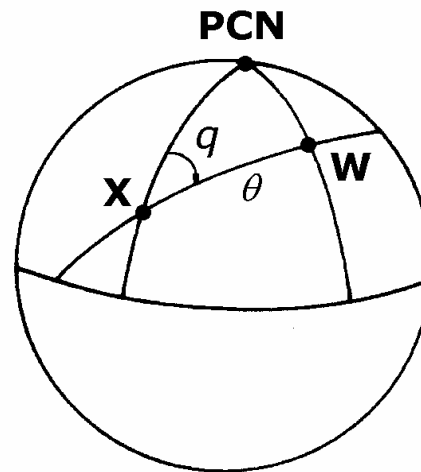
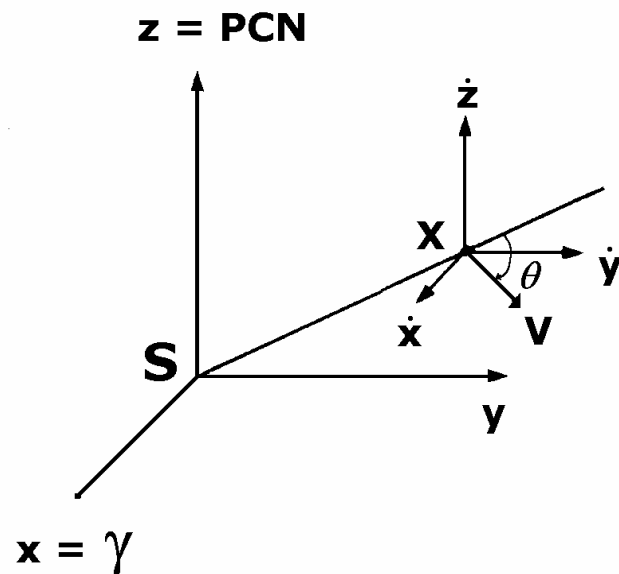
Una alternativa è derivare i moti propri rispetto a uno sfondo non rotante di oggetti fissi, come le quasars; il sistema di riferimento ICRF è privo di rotazione per definizione, cosicché si fanno molti sforzi per riferire il sistema dei moti propri a esso.

# Apice dei moti stellari - 1

Si consideri in Figura il sistema cartesiano equatoriale **eliocentrico**, e siano:

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

le componenti della velocità  $\mathbf{V}$  della stella  $X$  in esso.



Sulla sfera celeste, la direzione di  $\mathbf{V}$  corrisponde al punto  $W$  (**apice del moto stellare**), e il cerchio massimo  $XW$  al piano passante per  $SX$  e contenente il vettore  $\mathbf{V}$ .

# Apice dei moti stellari - 2

Le componenti cartesiane possono essere espresse in termini di  $(V_{t\alpha}, V_{t\delta}, V_r)$  da una adatta rotazione di coordinate. La Tabella dà la matrice di rotazione che trasforma  $(V_{t\alpha}, V_{t\delta}, V_r)$  in  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  e viceversa.

	$V_{t\alpha}$	$V_{t\delta}$	$V_r$
$\dot{x}$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha \sin \delta$	$\cos \alpha \cos \delta$
$\dot{y}$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha \sin \delta$	$\sin \alpha \cos \delta$
$\dot{z}$	0	$\cos \delta$	$\sin \delta$

per esempio:

$$\dot{x} = -V_{t\alpha} \sin \alpha - V_{t\delta} \cos \alpha \sin \delta + V_r \cos \alpha \cos \delta$$

$$V_{t\alpha} = -\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha$$

# Apice dei moti stellari - 3

Richiamando le precedenti espressioni della velocità tangenziale  $V_t$ , le componenti cartesiane equatoriali si derivano dalle quantità osservabili ( $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\delta$ ,  $V_r$ ):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{4.740}{\pi}(\mu_\alpha \sin \alpha + \mu_\delta \cos \alpha \sin \delta) + V_r \cos \alpha \cos \delta \\ \dot{y} = +\frac{4.740}{\pi}(\mu_\alpha \cos \alpha - \mu_\delta \sin \alpha \sin \delta) + V_r \sin \alpha \cos \delta \\ \dot{z} = +\frac{4.740}{\pi}\mu_\delta \cos \delta + V_r \sin \delta \end{cases}$$

Dalla conoscenza dell'intero vettore di velocità  $\mathbf{V}$  si può dunque determinare la direzione del moto della stella nel riferimento eliocentrico  $S(x, y, z)$ , cioè la direzione dell'apice  $W$ .

# Coordinate dell'apice W

Le coordinate equatoriali dell'apice W si ricavano da :

$$\begin{cases} \sin \delta_W = \cos \theta \sin \delta + \sin \theta \cos \delta \cos q \\ \cos(\alpha_W - \alpha) \cos \delta_W = \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta \cos q \\ \sin(\alpha_W - \alpha) \cos \delta_W = \sin \theta \sin q \end{cases}$$

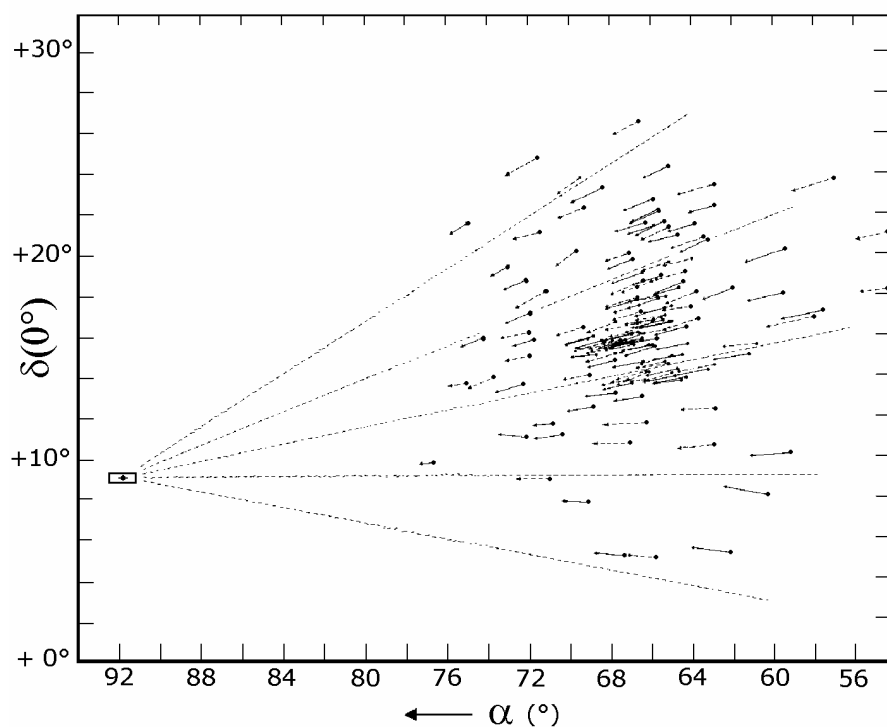
dove  $(\alpha, \delta)$  sono le coordinate iniziali della stella X. La distanza angolare tra X e W è:

$$\cos \theta = \sin \delta_W \sin \delta + \cos \delta_W \cos \delta \cos(\alpha_W - \alpha)$$

In generale tuttavia, **la parallasse è sconosciuta, e non conosciamo la lunghezza dell'arco  $\theta$** . Tuttavia, lo studio statistico dei moti in una data area di cielo possono evidenziare l'esistenza di gruppi di stelle *aventi moti convergenti allo stesso apice*, come se il gruppo fosse co-movente. Si parla anche di *corrente di stelle*.

# L'ammasso aperto nelle Iadi

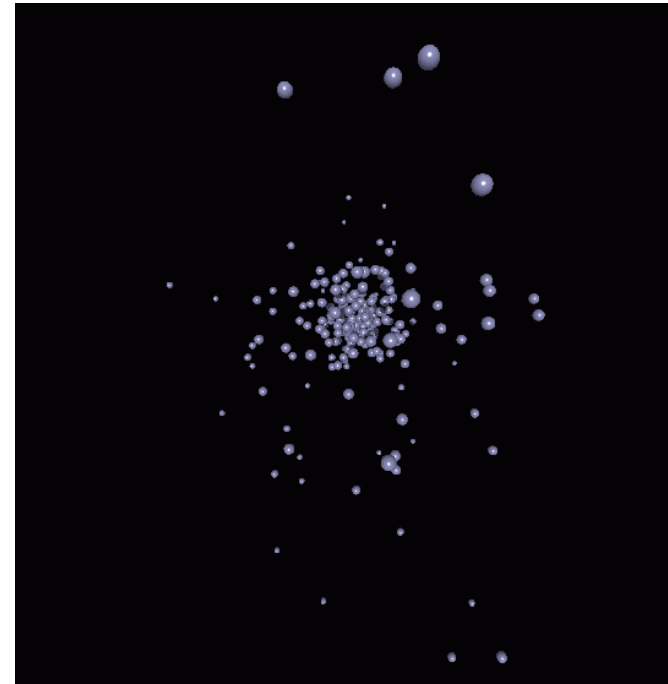
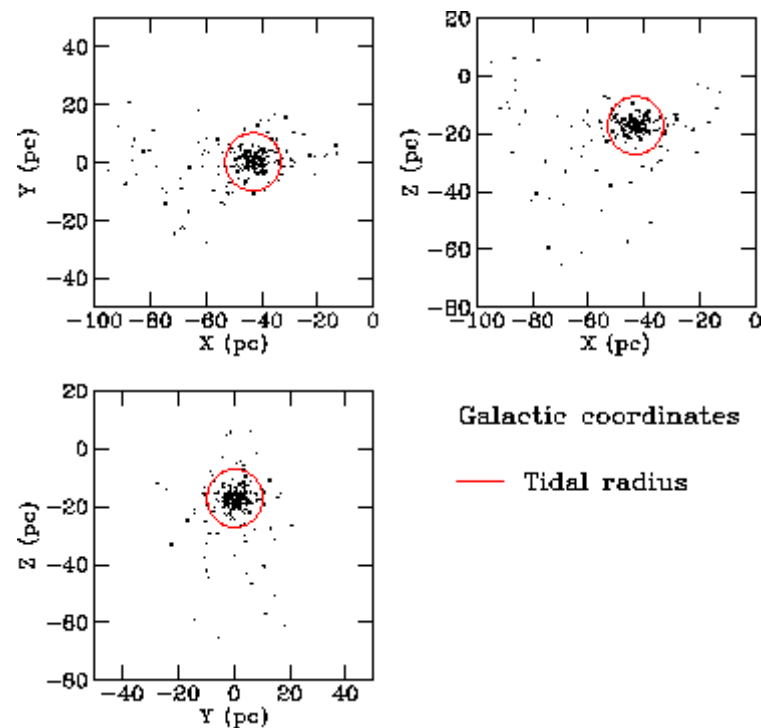
Consideriamo in particolare il vicino ammasso aperto delle Iadi, la cui distanza è di circa 45 pc, e che si estende nello spazio per circa 10 pc.



La convergenza dei moti propri verso un apice comune fu riconosciuta molto tempo fa (vedi Figura), ma i dati del satellite Hipparcos ne hanno fornito una conoscenza molto più precisa (vedi Perryman et al., 1998). Questo è uno dei pochi casi in cui le osservazioni danno direttamente la struttura tri-dimensionale, per cui le Iadi giocano un ruolo centrale nella calibrazione di varie relazioni, ad es.

delle ordinate nel *diagramma Hertzsprung - Russel (H-R)*.

# La struttura 3-D delle Iadi



La posizione di 218 stelle delle Iadi proiettata in coordinate galattiche. Il Sole è a  $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ . L'asse X punta verso il centro della Via Lattea, l'asse Y nella direzione della rotazione galattica. Il cerchio rosso indica il cosiddetto 'raggio mareale' dell'ammasso, e vale circa 10 pc. Un buon numero di stelle sono al di fuori di tale circolo, per cui l'ammasso non può essere dinamicamente stabile su lunghe scale di tempo.

# Il moto peculiare del Sole

Siccome abbiamo riferito le velocità radiali e i moti propri all'osservatore solare, dobbiamo attenderci che se questi ha un moto peculiare rispetto all'insieme delle stelle vicine, tale moto si trovi riflesso in qualche misura nelle osservazioni. Esaminiamo dapprima **i moti propri**.

Già W. Herschel nel 1783 aveva esposto i fondamenti del metodo, utilizzando i moti propri di appena 12 stelle. In effetti,  $q$  è indipendente dalla parallasse, e coincide con l'angolo di posizione della velocità tangenziale. Il metodo di Herschel può visualizzarsi facilmente: si conducano sulla sfera celeste i cerchi massimi definiti dai moti propri, e si consideri il semi-cerchio orientato come il moto stesso. Tutti questi semi-cerchi si intersecheranno, entro gli errori, in un punto (o più realisticamente, in una piccola area) che è l'antapice del moto solare.

*Questo metodo fornisce dunque la direzione, ma il modulo della velocità del Sole rimarrà indeterminato.*



# Un caso ideale per stelle vicine

Esaminiamo ora il caso di un insieme di  $N$  stelle vicine, per le quali si conoscono le 4 quantità  $(\pi, \mu, q, V_r)$ , e dunque il vettore di velocità eliocentrica di ciascuna stella:

$$\mathbf{V}(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$$

( $i = 1, \dots, N$ ). Calcoliamo il valor medio, cambiamo segno, e definiamo questa quantità moto *peculiare del Sole* rispetto a quel dato insieme:

$$\dot{x}_{\odot} = -\langle \dot{x} \rangle = -\frac{1}{N} \sum_1^N \dot{x}_i \quad \dot{y}_{\odot} = -\langle \dot{y} \rangle = -\frac{1}{N} \sum_1^N \dot{y}_i \quad \dot{z}_{\odot} = -\langle \dot{z} \rangle = -\frac{1}{N} \sum_1^N \dot{z}_i$$

Il modulo  $s_{\odot}$  e l'apice ( $\alpha_{\odot}, \delta_{\odot}$ ) saranno derivati nel modo usuale:

$$s_{\odot} = \sqrt{\dot{x}_{\odot}^2 + \dot{y}_{\odot}^2 + \dot{z}_{\odot}^2} \quad , \quad \tan \alpha_{\odot} = \frac{\dot{y}_{\odot}}{\dot{x}_{\odot}} \quad , \quad \sin \delta_{\odot} = -\frac{\dot{z}_{\odot}}{s_{\odot}}$$

# Il Local Standard of Rest (LSR)

Le prime osservazioni fornirono una velocità di circa 20 km/s, in direzione  $\mathbf{W}_\odot(\alpha_\odot, \delta_\odot) \approx (18^h, +30^\circ)$ , non distante da Vega.

Questo valore dipende dall'insieme di stelle che abbiamo usato per definirlo. Idealmente, se potessimo usare **tutte le stelle vicine**, potremmo derivare un cosiddetto *Local Standard of Rest (LSR)*, cioè un sistema di riferimento di velocità, di grande interesse per lo studio della cinematica e dinamica della Via Lattea nei dintorni del Sole.

E' dunque utile *ruotare il riferimento equatoriale in quello galattico*: indichiamo con  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i)$  le tre componenti di *velocità* (si noti che non compare il punto sopra alla lettera!), con l'asse  $\mathbf{u}$  diretto verso il Centro Galattico, l'asse  $\mathbf{v}$  a  $90^\circ$  sul piano galattico (verso la costellazione del Cigno), e l'asse  $\mathbf{w}$  verso il polo galattico. Questo LSR ha un significato puramente cinematico, non essendosi tenuto conto delle masse delle stelle, e non ha una precisa origine nello spazio. Possiamo assumere che il Sole (o meglio, il baricentro del Sistema Solare) stiano passando per l'origine del LSR all'epoca presente.