

L'aberrazione della luce

Aberrazione solare

Aberrazione annua

Aberrazione Diurna

Aberrazione stellare e planetaria

Deflessione gravitazionale della luce

L'aberrazione della luce

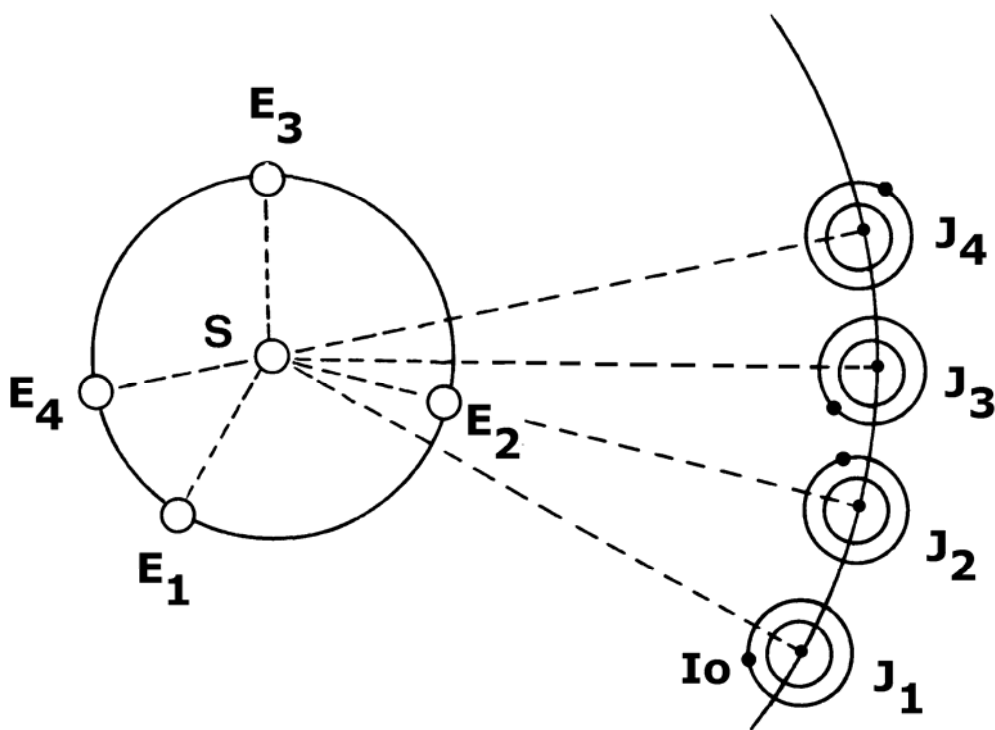
Mentre precessione e nutazione sono fenomeni dovuti alla variabile **orientazione** dell'osservatore rispetto alle stelle fisse, l'aberrazione invece è dovuta alla **finita velocità della luce c** , e alla variabile direzione del vettore velocità dell'osservatore rispetto alla direzione della sorgente celeste.

Oleg Roemer, assistente di J. D. Cassini a Parigi, ottenne il primo valore attendibile di **c** dai ritardi o anticipi delle occultazioni di Io (luna di Giove).

Nel 1727 G. Bradley scoprì l'effetto di questa velocità finita come periodica variazione delle coordinate apparenti di γ Dra (una stella non troppo distante dal polo eclittico).

Solo dopo 150 anni Foucault e Fizeu ottennero il valore di **c** con misure di laboratorio.

Geometria Sole-Terra - Giove - Io



Le osservazioni di O. Roemer dimostrano che **Io** anticipa o ritarda di $\Delta\tau = 8^m19^s$ alla opposizione o congiunzione rispetto alle quadrature:

$$\Delta t = \pm \tau_a \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_J)$$

Ovviamente, la configurazione 4 non è direttamente osservabile.

L'aberrazione solare - 1

La Terra descrive al Sole un'orbita che per ora possiamo considerare circolare, con raggio $a = 1$ UA , e con velocità uniforme V la cui direzione è perpendicolare al raggio vettore.

Il modulo è dato da:

$$V = 2\pi \frac{a}{P} = na \approx 30 \text{ km/s}$$

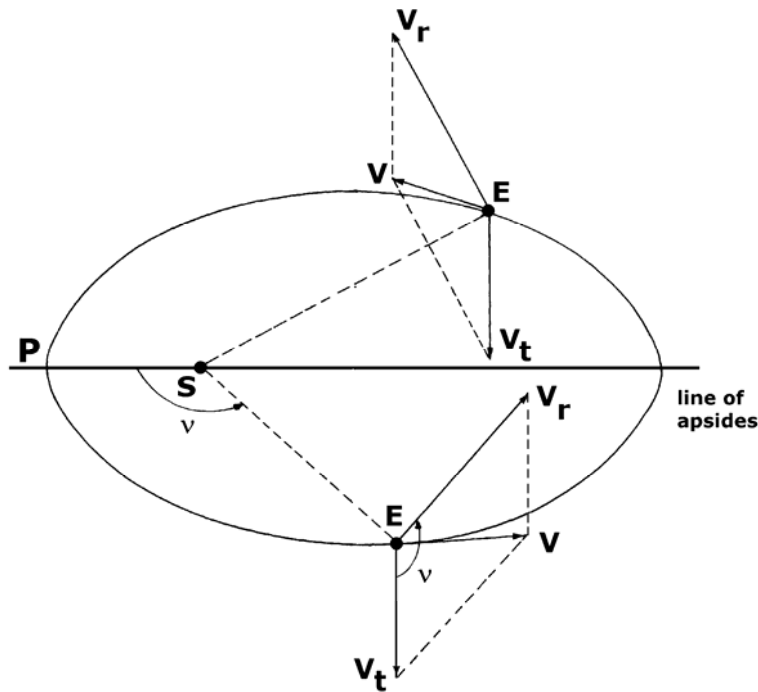
essendo P il periodo siderale e n ($\approx 3548''/\text{giorno}$) il cosiddetto ***moto medio***.

La luce percorre l'UA nel tempo $\tau_a \approx 8^m 19^s$ (una quantità chiamata tempo di aberrazione, o tempo luce per la distanza unitaria). Per l'osservatore geocentrico, in quegli $8^m 19^s$ il Sole si sarà mosso dalla sua posizione apparente (quando la luce lo lasciò) a quella geometricamente corretta ma inosservabile che corrisponde all'arrivo della luce. La distanza angolare tra le due posizioni è:

$$K = 2\pi \frac{a}{Pc} = n\tau_a = \frac{V}{c} \approx 0.0001 \quad (\text{radianti}), \quad \text{cioè: } \mathbf{K \approx 20''.6}$$

L'aberrazione solare - 2

La teoria completa tiene conto della ellitticità dell'orbita: il vettore \mathbf{V} si può scomporre in due componenti, una perpendicolare al semiasse maggiore \mathbf{V}_t , e una normale al raggio vettore \mathbf{V}_r .



$e \approx 0.0167$ è l'eccentricità,
 a è il semi-asse maggiore
 dell'orbita terrestre,

P è il perielio.

L'espressione delle due
 componenti è:

$$V_r = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \quad , \quad V_t = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \approx \frac{1}{60} V_r$$

Si noti che \mathbf{V}_t è costante anche in direzione e verso.

L'aberrazione solare - 3

La costante di aberrazione solare è allora più propriamente:

$$K = \frac{V_r}{c} = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}} \approx 20''.495$$

La componente \mathbf{V}_t è responsabile della cosiddetta **aberrazione ellittica** $K_e \approx 0''.343 \approx 0^s.023$, che cambia di giorno in giorno, e in linea di principio è osservabile dalla Equazione del Tempo (che vedremo più avanti).
In totale, la differenza in longitudine eclittica tra il Sole aberrato (quello osservabile) e quello geometrico è:

$$\lambda_{\odot} - \lambda = -K \left[1 - e \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_{\Pi}) \right]$$

essendo λ_{Π} la longitudine del perigeo (a 180° dalla longitudine del perielio; all'epoca presente $\lambda_{\Pi} \approx 18^h48^m$).

Una corrispondente equazione deve essere applicata alla differenza delle Ascensioni Rette.

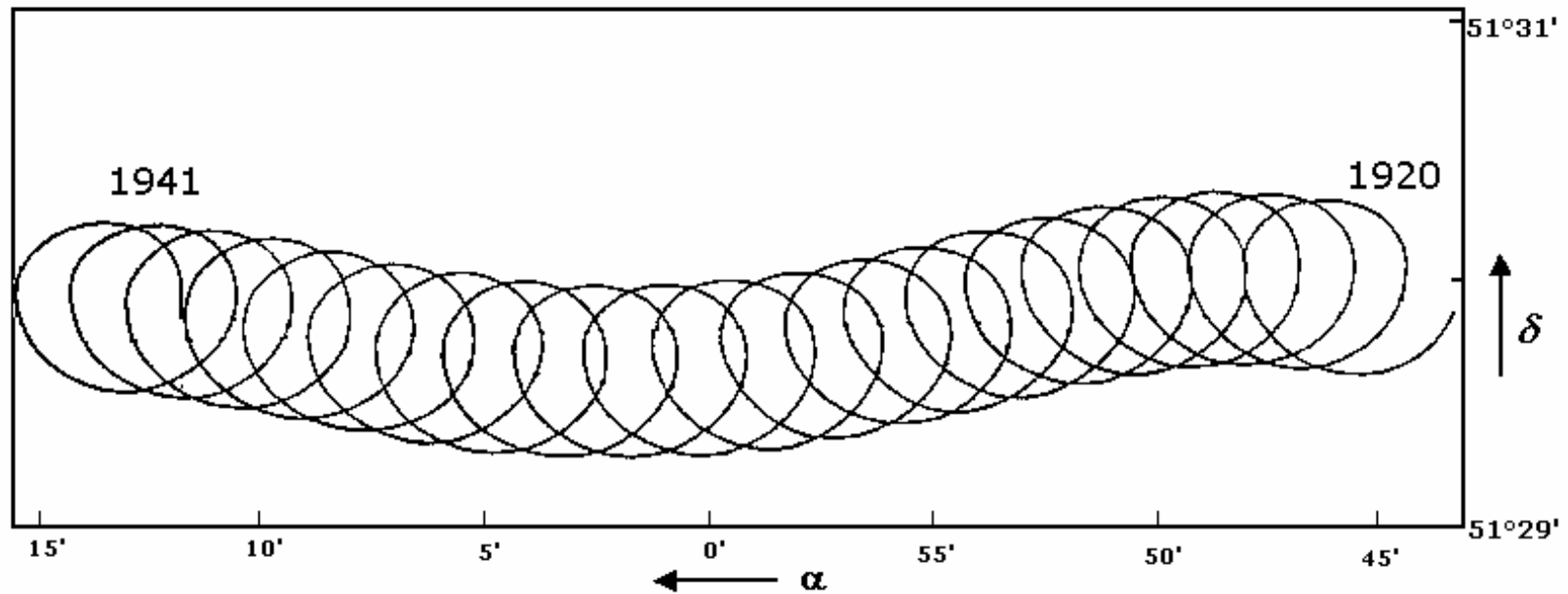
L'aberrazione annua - 1

L'aberrazione annua delle stelle fisse fu scoperta da Bradley osservando la stella γ Dra al cerchio meridiano. Nel corso dell'anno, la declinazione della stella oscilla di circa $\pm 20''.5$ attorno a una posizione media, ***raggiungendo la massima deviazione alla opposizione o congiunzione solare.***

Questo movimento è troppo grande per essere attribuibile a un effetto di distanza (***parallasse***), e per di più sarebbe sfasata di 3 mesi rispetto a questa. Inoltre, Bradley fu colpito dalla coincidenza numerica con il valore della aberrazione solare, e pertanto sospettò che la causa fosse la stessa, vale a dire ***la velocità finita della luce.***

Ovviamente anche la AR doveva essere variabile come la declinazione, ma Bradley non aveva a disposizione orologi sufficientemente precisi per misurare tale effetto.

L'aberrazione annua - 2



Una serie di posizioni di γ Dra dal 1920 al 1941, durante una completa rivoluzione dei nodi dell'orbita lunare. Si può distinguere un piccolo effetto precessionale (piccolo per la prossimità della stella al polo eclittico), la nutazione sempre scoperta da Bradley stesso (la sinusoide con periodo 18.6 anni), e finalmente la variazione annua dovuta alla aberrazione.

La scoperta di Bradley provò definitivamente la correttezza dell'ipotesi di Roemer, fornì un metodo diretto per determinare K , e una seconda e più precisa maniera di determinare c .

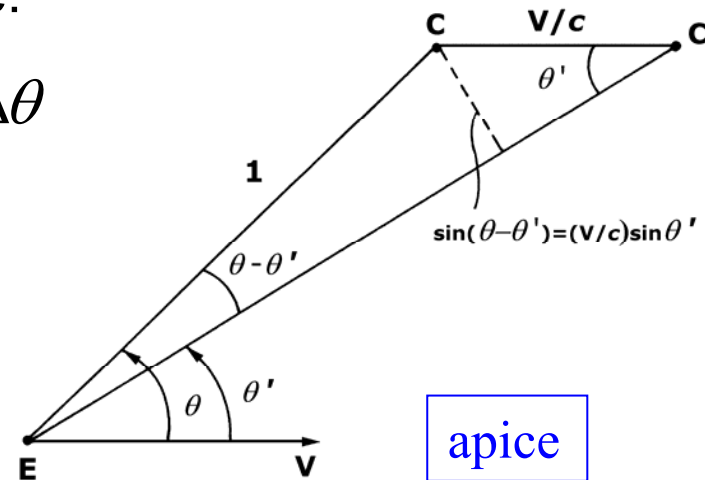
L'aberrazione annua - 3

Un modo intuitivo di capire e misurare l'aberrazione annua, basato sulle leggi galileiane di trasformazione delle velocità (vedi Figura), è il seguente : sia **C** il centro dell'obiettivo del telescopio, **E** l'intersezione dell'asse ottico con il piano focale, cosicché **EC** è la direzione della visuale. Il vettore velocità della Terra **V** punta verso una istantanea direzione chiamata **apice del moto**. Sia θ l'angolo tra la visuale e l'apice, nel piano definito dalle due direzioni. Durante il tempo Δt impiegato dalla luce per percorrere la distanza **CE**, la Terra si muove di $V\Delta t = (V/c) \cdot CE$. Dunque il telescopio deve essere puntato in direzione θ' , non θ , inclinandolo **verso la direzione dell'apice**. Dalla figura, si vede facilmente che:

$$\sin(\theta - \theta') = \sin \Delta\theta = \frac{V}{c} \sin \theta = \frac{V}{c} \sin(\theta - \Delta\theta) \approx \Delta\theta$$

La componente della velocità terrestre perpendicolare alla *apparente* direzione della stella è dunque:

$$V_{\perp} = \frac{V}{c} \sin \theta'$$



L'aberrazione annua - 4

Si noti che l'effetto è **indipendente** dalla lunghezza d'onda, dalla lunghezza focale del telescopio, dalla distanza dell'astro e anche dalla sua velocità radiale: **l'aberrazione è assolutamente la stessa per stelle, galassie, coppie di stelle o coppie di galassie** (a parte il piccolissimo effetto dovuto alla differenza di posizioni relative).

Ci si potrebbe anche chiedere quale sia il valore corretto di **c** da usarsi con osservazioni terrestri, cioè se il valore di **c** nel vuoto o in aria (i due differiscono per circa 67 km/s in normali condizioni di temperatura e pressione, cioè una differenza ben misurabile). La risposta corretta è la **velocità nel vuoto**: dato che l'atmosfera partecipa dello stesso moto di traslazione della Terra, nessun addizionale effetto di aberrazione è introdotto dalla sua presenza (la rifrazione atmosferica è uno dei fattori che più limitano la precisione delle osservazioni da Terra, ma questo è un effetto completamente diverso). La prova sperimentale fu fornita nel 1872 dall'astronomo reale G. B. Airy, riempiendo d'acqua il suo telescopio. L'aberrazione non cambiò valore.

L'aberrazione relativistica

Questa trattazione non è del tutto corretta, come si vede dalla precedente figura, in cui il vettore risultante ha modulo $> c$, e dunque la costruzione viola la Relatività Ristretta. Tuttavia la differenza con la teoria precisa è piccola, essendo dell'ordine di $(V/c)^2$. Più precisamente:

$$\sin \Delta \theta_{\text{Rel}} = \sin \Delta \theta_{\text{Galil}} + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \sin 2\theta'$$

in funzione dell'osservabile θ' . Si noti la dipendenza della correzione da $\sin 2\theta$, non da θ .

Dunque, la formula elementare è approssimata a termini dell'ordine di $(V/c)^2$ per due distinte ragioni:

1. Si sono trascurati termini di ordine superiore nelle espansioni trigonometriche
2. Si sono usate regole di trasformazione non corrette

Numericamente, le due espressioni, galileiana e relativistica, danno lo stesso valore entro 0".002 (che è la precision del satellite astrometrico Hipparcos).

Effetto dell'aberrazione annua sulle coordinate stellari - 1

Nell'ipotesi semplificativa di orbita circolare, nel corso dell'anno \mathbf{V} ruota di 360° nel piano dell'eclittica con modulo costante, e puntando sempre a 90° dal Sole. Conseguentemente, una stella di latitudine eclitticale β apparirà descrivere nel corso dell'anno un'ellisse di semiasse maggiore parallelo al piano eclittico e pari a K , e un semiasse minore perpendicolare all'eclittica pari a $K \cdot \sin \beta$.

L'ellisse degenera pertanto in un cerchio se la stella è al polo eclittico, e in un segmento sulla eclittica stessa per una stella eclitticale. Dunque si constata che la stella **non viene mai vista dove davvero è** (se non due volte all'anno se è eclitticale).

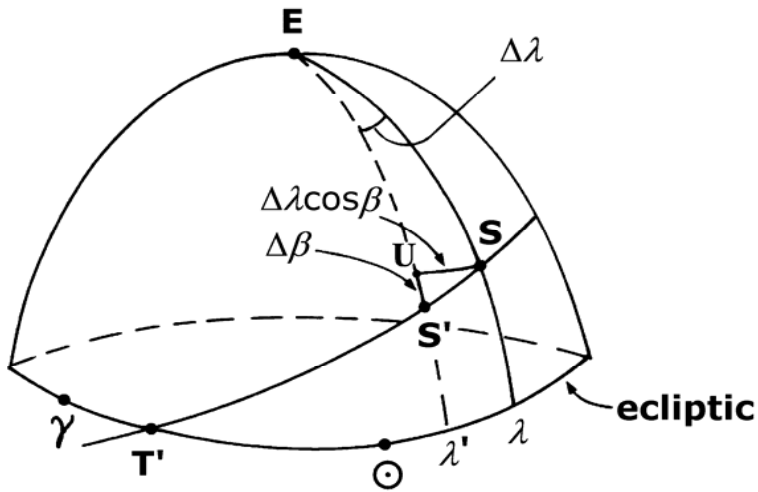
Effetto dell'aberrazione annua sulle coordinate stellari - 2

Come si è detto, le dimensioni della ellisse sono le stesse per tutti i corpi celesti (pianeti, stelle, galassie, quasars, etc.) *aventi la stessa latitudine eclittica*, e ***non riflettono l'ellitticità dell'orbita terrestre.***

In altre parole, l'aberrazione annua causa una lieve distorsione della volta celeste, a differenza dalla precessione e nutazione che invece sono rotazioni rigide.

Così come la rivoluzione annua, ***qualunque altra velocità periodica dell'osservatore*** si manifesterà come aberrazione, ad es. la rotazione diurna, o la rivoluzione attorno al baricentro Terra-Luna, con il periodo e l'ampiezza corrispondenti.

Effetto dell'aberrazione annua sulle coordinate stellari - 3



La posizione apparente della stella sul grande cerchio passante per essa è **S'**, spostata cioè da **S** verso **T'** della quantità **K**; **T'** a sua volta è sull'eclittica a 90° **dietro** al Sole.

Data la piccolezza di **K** possiamo usare trigonometria piana nel triangolo **SS'U**. Dopo semplici passaggi, otteniamo:

$$(\lambda' - \lambda) \cos \beta = \Delta\lambda \cos \beta = -K \cos(\lambda_{\odot} - \lambda) \quad ,$$

$$(\beta' - \beta) = \Delta\beta = -K \sin(\lambda_{\odot} - \lambda) \sin \beta$$

Nel corso dell'anno, la stella traccia il luogo:

$$(\Delta\lambda \cos \beta)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\sin \beta} \right)^2 = K^2 \quad \text{che è l'ellisse di aberrazione annua, di semiasse maggiore } \mathbf{K}.$$

Effetto dell'ellitticità dell'orbita

Aggiungiamo ora l'effetto della piccola ellitticità e dell'orbita terrestre, cioè la piccola e costante componente di velocità $K \cdot e$ perpendicolare al semiasse maggiore.

Innanzitutto, il valore della costante K si deve intendere come:

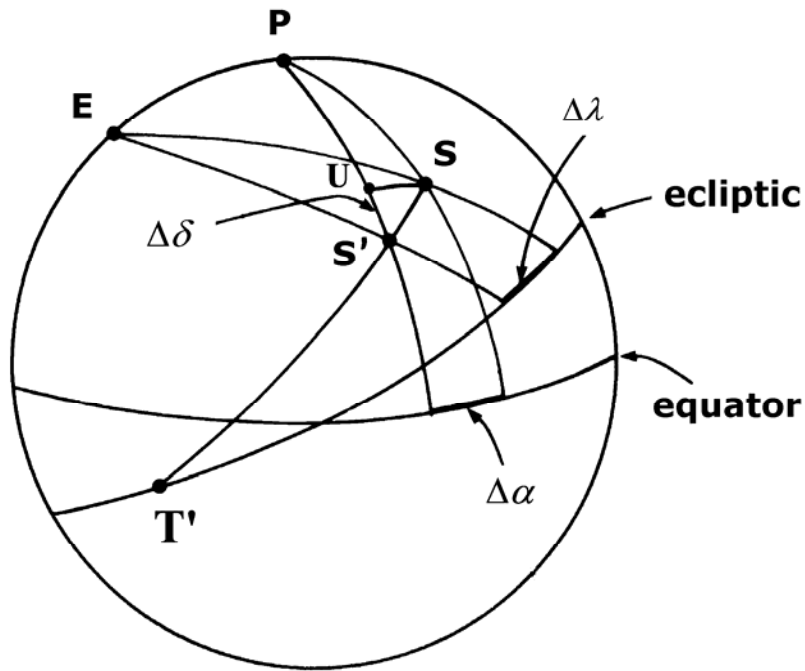
$$K = \frac{V_r}{c} = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}} \approx 20''.495$$

In secondo luogo, l'effetto della componente perpendicolare è il seguente: la posizione geometrica della stella non è esattamente il centro dell'ellisse di aberrazione, ma è spostata di $0''.343$ in una direzione la cui longitudine è: $\lambda = \lambda_{\Pi} - 90^\circ$, cioè a 90° dalla longitudine geocentrica del **perigeo** del Sole. Questo spostamento (quasi) costante è chiamato **aberrazione ellittica**, e vale:

$$\Delta\lambda_e = -eK \cos \beta \cos(\lambda_{\Pi} - \lambda) \quad , \quad \Delta\beta_e = -eK \sin(\lambda_{\Pi} - \lambda) \sin \beta$$

che sono i cosiddetti '**termini E**' della aberrazione annua.

Aberrazione annua in coordinate equatoriali-1



Ignorando i piccoli termini **E**, e chiamando

$$(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$$

le componenti del vettore velocità della Terra, i cui valori approssimati sono:

$$\dot{X} = +0.0172 \sin \lambda_{\odot}$$

$$\dot{Y} = -0.0158 \cos \lambda_{\odot}$$

$$\dot{Z} = -0.0068 \cos \lambda_{\odot}$$

si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha = \alpha' - \alpha = -K \frac{\sin \alpha \sin \lambda_{\odot} + \cos \varepsilon \cos \alpha \cos \lambda_{\odot}}{\cos \delta} = \frac{1}{c} \frac{-\dot{X} \sin \alpha + \dot{Y} \cos \alpha}{\cos \delta} \\ \Delta\delta = \delta' - \delta = -K (\sin \varepsilon \cos \delta \cos \lambda_{\odot} + \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda_{\odot} - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta \cos \lambda_{\odot}) = \\ = \frac{1}{c} (-\dot{X} \cos \alpha \sin \delta - \dot{Y} \sin \alpha \sin \delta + \dot{Z} \cos \delta) \end{array} \right.$$

Aberrazione annua in coordinate equatoriali-2

Per rimuovere l'aberrazione ellittica, dobbiamo aggiungere i termini (quasi) costanti:

$$\Delta\alpha = -Ke[\sin\lambda_{\Pi}\sin\alpha + \cos\lambda_{\Pi}\cos\varepsilon\cos\alpha]/\cos\delta$$

$$\Delta\delta = -Ke[\sin\lambda_{\Pi}\cos\alpha + \cos\lambda_{\Pi}\cos\varepsilon\sin\alpha]\sin\delta + \cos\lambda_{\Pi}\sin\varepsilon\cos\delta$$

per l'FK5 e tutti i cataloghi su esso basati. La correzione dunque prende la forma:

$$\alpha' - \alpha = Cc + Dd, \quad \delta' - \delta = Cc' + Dd'$$

in cui C, D dipendono dalla longitudine del Sole (cioè dalla data), mentre c, c', d, d' dipendono dalle coordinate della stella e dalla obliquità dell'eclittica ε .

Si noti la somiglianza formale con l'espressione della nutazione, benché le basi fisiche siano così diverse.

Abbiamo già detto che l'aberrazione implica una lieve distorsione della volta celeste. Dunque la distanza angolare s tra due stelle, e il loro angolo di posizione p verranno alterati. Per dare un ordine di grandezza, su un arco di 1° il massimo effetto è di $0^s.02/\cos\delta$ in α , di $0''.3$ in δ .

L'aberrazione diurna

La velocità di rotazione diurna sarà responsabile di un simile effetto, benché di ampiezza molto minore e dipendente dalla latitudine geocentrica ϕ dell'osservatore. Infatti, la velocità diurna vale circa 0.46 km/s all'equatore, il suo apice è sul piano equatoriale a 90° dal meridiano e verso Est, cioè di coordinate equatoriali:

$$\alpha_{\oplus} = TS + 6^h, \quad \delta_{\oplus} = 0^\circ$$

dove TS è il tempo siderale locale. L'ellisse di aberrazione diurna è dunque parallela al sistema equatoriale e la sua piccolezza consente di usare le formule al primo ordine. Per un osservatore a latitudine geocentrica ϕ a distanza ρ km dal centro della terra, la differenza è:

$$dHA = -d\alpha = 0^s.021(\rho\omega \cos \phi' / c) \cos HA / \cos \delta$$

$$d\delta = 0''.320(\rho\omega \cos \phi' / c) \sin HA \sin \delta$$

$$\text{ove:} \quad \omega \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Aberrazione stellare e planetaria

Abbiamo visto che la correzione per aberrazione annua fornisce la direzione geometrica all'astro all'istante in cui la luce *arriva all'osservatore*. Ma nell'incognito intervallo di tempo tra l'emissione e la ricezione l'astro sarà andato da qualche altra parte, generalmente incognita.

Invece per oggetti del Sistema Solare questa informazione è disponibile con alta precisione, per cui possiamo tener conto del tempo di propagazione della luce dall'oggetto a noi, diciamolo $\tau = \rho/c$, se ρ è la distanza (km) del corpo dalla Terra.

Con il termine *aberrazione planetaria* intenderemo allora la **somma** della aberrazione annua (che affetta anche le stelle del campo) **più** il termine di propagazione. La posizione 'vera' del corpo è allora:

$$\alpha_t = \alpha' + \Delta\alpha + \tau \frac{d\alpha}{dt} \quad , \quad \delta_t = \delta' + \Delta\delta + \tau \frac{d\delta}{dt}$$

in cui le derivate sono conosciute dagli elementi orbitali, e i termini di aberrazione $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ sono gli stessi di quelli delle stelle circostanti.

La deflessione gravitazionale della luce - 1

C'è un altro effetto dovuto alla propagazione della luce che non era incluso nel trattamento pre-1984, cioè la deflessione gravitazionale della luce da parte della massa del Sole. Karl Schwarzschild nel 1915 introdusse un raggio tipico associato con un corpo sferico di massa M , il cosiddetto raggio di Schwarzschild:

$$r_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

il cui valore è circa 3.0 km per il Sole e 0.88 cm per la Terra (come si è detto nell'Introduzione al corso). L'influenza della massa del Sole su un raggio radente ne renderà il cammino lievemente concavo verso il Sole, cosicché l'osservatore terrestre vede la stella lievemente spostata verso l'esterno, della quantità:

$$\Delta\theta = (1 + \gamma) \frac{r_s}{R} = (1 + \gamma) \frac{r_s}{a_{\odot} \theta_{\odot}}$$

in cui a_{\odot} , θ_{\odot}
sono rispettivamente l'UA e il
raggio angolare del Sole (circa 16')

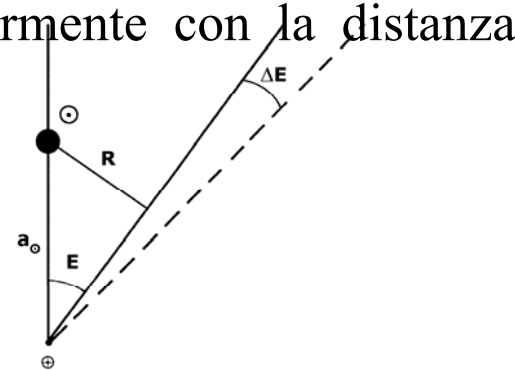
La costante γ vale 0 nella teoria newtoniana e 1 in Relatività Generale; dunque $\Delta\theta$ è 0".875 nel primo caso, 1".75 nel secondo. Tutte le misure confermano il valore relativistico con alta precisione.

La deflessione gravitazionale della luce - 2

Si noti che la deflessione è indipendente dalla lunghezza d'onda, è identica in campo X, o ottico, o radio. In effetti, le misure radio sono molto più precise di quelle ottiche. Dato che il campo gravitazionale relativistico agisce come un mezzo di indice di rifrazione diverso da 1, al posto della deflessione si può anche misurare (sempre in campo radio) il ritardo di propagazione dell'onda (detto anche ritardo di Shapiro).

Lo spostamento radiale verso l'esterno diminuisce linearmente con la distanza angolare dal centro del Sole:

$$\Delta E = \frac{r_s}{a_\odot} \frac{1 + \cos E}{\sin E} = 0''.00407 \frac{1}{\tan \frac{E}{2}}$$



A incidenza davvero radente, se il diametro solare vale $0^\circ.25$, lo spostamento è pari a $1''.866$. Si noti che a 45° dal centro del Sole lo spostamento è ancora a livello di $0''.01$, e di $0''.004$ a 90° . Una appropriata proiezione di questo angolo nel riferimento equatoriale permetterà la determinazione delle correzioni da applicare alle coordinate apparenti.