

La nutazione libera (o euleriana)

Alcune considerazioni dinamiche -1

Si può dimostrare che il potenziale gravitazionale dovuto a Sole e Luna, e responsabile per i movimenti di precessione e nutazione si può esprimere con:

$$U_{\text{prec}} \approx -3G \frac{(C - A)}{2} \left[\frac{M_{\text{D}}}{r_{\text{D}}^3} \sin^2 \delta_{\text{D}} + \frac{M_{\odot}}{r_{\odot}^3} \sin^2 \delta_{\odot} \right]$$

sempre che la Terra sia uno sferoide di rivoluzione omogeneo, con momenti di inerzia equatoriale A e polare C , e dove intervengono le masse, distanze e declinazioni dei due corpi esterni: Per tale sferoide si ha:

$$a = b = a_{\oplus} \quad , \quad A = \frac{1}{5} M_{\oplus} (b^2 + c^2) \quad , \quad A = B$$

$$C = \frac{1}{5} M_{\oplus} (a^2 + b^2) \quad , \quad \frac{C}{A} = \frac{2a_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^2 + c^2} \approx 1.003$$

Alcune considerazioni dinamiche -2

In virtù della terza legge di Keplero, se diciamo P il periodo e n il moto medio:

$$P^2 (M_Q + M_{\oplus}) = \frac{4\pi^2}{n_Q^2} (M_Q + M_{\oplus}) = \frac{4\pi^2}{G} a_Q^3$$

(essendo Q il generico corpo esterno) otteniamo:

$$U_{\text{prec}} \approx -3 \frac{(C - A)}{2} \left[n_{\text{J}}^2 \frac{M_{\text{J}}}{(M_{\text{J}} + M_{\oplus})} \sin^2 \delta_{\text{J}} + n_{\odot}^2 \sin^2 \delta_{\odot} \right]$$

Dato che la massa del Sole eccede grandemente le altre due, rimane la sola massa della Luna, che quindi si può stimare dalle costanti di precessione e nutazione (il rapporto tra la massa lunare e quella terrestre vale circa 1/80).

Confronto tra il potenziale precessionale e quello di rotazione

Confrontiamo l'energia precessionale con quella della rotazione diurna T :

$$T = \frac{1}{2} C \Omega^2 \quad , \quad \Omega = 2\pi / (\text{giorno siderale}) \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

U_{prec} può essere massimizzato prendendo il valor massimo della declinazione di Sole e Luna, da cui:

$$\left| \frac{U_{\text{prec}}}{T} \right| \leq 3 \frac{(C - A)}{C} \left(\frac{n_{\odot}}{\Omega} \right)^2 \left[1 + 0.25 \frac{M_{\text{J}}}{M_{\oplus}} \left(\frac{n_{\text{J}}}{n_{\odot}} \right)^2 \right]$$

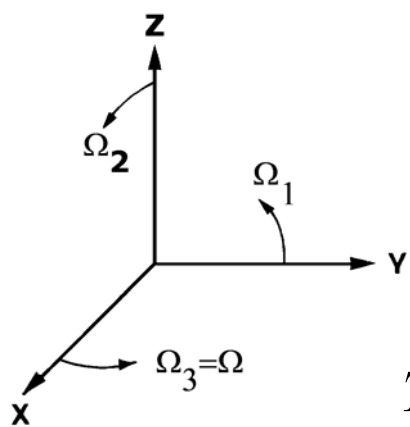
$$n_{\text{J}} / n_{\odot} \approx 1/13 \text{ , } n_{\odot} / \Omega \approx 1/366.25 \quad , \quad U_{\text{prec}} / T \leq 1 \times 10^{-7}$$

cioè una piccolissima frazione!

Ha dunque senso studiare la rotazione di una ***ipotetica Terra 'libera'***, senza le forzanti di Luna e Sole per precessione e nutazione.

La rotazione della Terra libera - 1

La trattazione di questo problema, dovuta essenzialmente a Eulero, è piena di difficoltà, per cui citiamo solo alcuni risultati.



La figura mostra un riferimento **XYZ** fisso con la figura della Terra, e quindi rotante nel riferimento inerziale con velocità angolare Ω che possiamo scomporre nelle 3 componenti $\Omega(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

L'energia di rotazione vale:

$$T = \frac{1}{2}(A\Omega_1^2 + B\Omega_2^2 + C\Omega_3^2) = \frac{1}{2}(2A\Omega_1^2 + C\Omega_3^2) \approx \frac{1}{2}C\Omega^2$$

dove Ω è la velocità diurna (siderale). La posizione del riferimento rotante in un riferimento inerziale (il piano XY si può identificare con l'equatore terrestre, il piano inerziale X_0Y_0 con l'eclittica fissa, i due piani si intersecano lungo la linea dei nodi passante per i punti vernali) si specifica con 3 angoli (θ, ψ, ϕ) , detti **angoli di Eulero**, le cui derivate si possono esprimere in funzione di $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. La direzione **Z** sarà quella del polo della figura terrestre.

La rotazione della Terra libera - 2

Dopo vari passaggi, si può arrivare alle relazioni:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \sigma \Omega \cos \left(\frac{C - A}{A} \Omega t + q \right) \\ \Omega_2 = \sigma \Omega \sin \left(\frac{C - A}{A} \Omega t + q \right) \\ \Omega_3 = \Omega \end{cases}$$

con σ, q incognite costanti iniziali. D'altra parte, il momento angolare totale \mathbf{M} :

$$\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3) = \mathbf{M}(I_1 \Omega_1, I_2 \Omega_2, I_3 \Omega_3) = \int \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) dm$$

è **costante** nello spazio inerziale, anche se la sua direzione **non** coincide necessariamente con quella di $\boldsymbol{\Omega}$; tuttavia, si può dimostrare che \mathbf{M} , $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{Z} (la direzione del polo di figura), rimangono sempre nello stesso piano. Quindi l'osservatore rotante (rigidamente collegato con la Terra) vede i vettori $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{M} ruotare attorno all'asse \mathbf{Z} con velocità angolare ω ; la componente di $\boldsymbol{\Omega}$ nel piano equatoriale avendo ampiezza costante σ .

Il moto del polo - 1

Per l'osservatore terrestre dunque, il polo di rotazione diurna sembrerà descrivere un moto di precessione attorno al polo di figura (moto detto di **polodia**), con frequenza:

$$\omega_{\text{pol}} \approx \frac{C - A}{A} \Omega \approx 0.003 \Omega$$

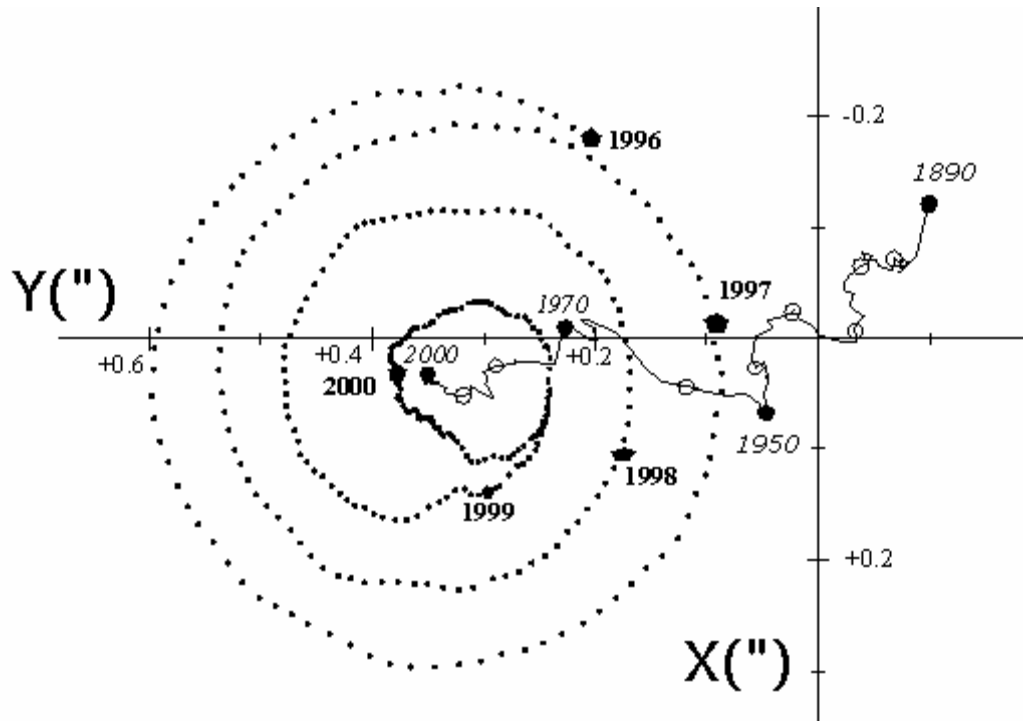
pari dunque a circa 10 mesi e ampiezza determinabile dalle osservazioni, più altri moti molto minori che qui trascuriamo.

Siccome abbiamo definito la latitudine come altezza del Polo celeste (quello di rotazione) sull'orizzonte, la conseguenza è una **variazione di latitudini** con detto periodo.

Tuttavia, le osservazioni provano che la **polodia** è composta di due termini, uno con frequenza annua, e facilmente giustificabile con la periodica variazione di distribuzione della massa della Terra (e dunque dei suoi momenti di inerzia) per cause meteorologiche, e uno con frequenza di circa 14 mesi, nettamente più lungo di quello euleriano. La giustificazione di questa differenza sta nella **non perfetta rigidità** della figura terrestre.

Il moto del polo - 2

Per quanto riguarda l'ampiezza del periodo pseudo-euleriano, le osservazioni danno un raggio di circa $0''.3$, cioè circa 9 metri sulla superficie.



La figura mostra la posizione del polo di rotazione dal 1996 al 2000, secondo le osservazioni VLBI, più una re-analisi della posizione del polo **convenzionale** a partire dal 1890.

L'asse X è diretto verso Greenwich, l'asse Y a 90° verso Ovest.