

Precessione luni-solare e Nutazione

La precessione degli equinozi

La spiegazione di Newton

La nutazione

Formule al primo ordine

Il formalismo di Newcomb

I movimenti dell'osservatore terrestre

Le coordinate equatoriali e eclittiche sono basate rispettivamente sul piano dell'equatore celeste dell'eclittica, avendo comune origine nel punto vernale γ : ogni movimento di questi piani rispetto alle stelle fisse risulterà in una variazione temporale delle coordinate. Le stelle dunque rappresentano per i presenti scopi un sistema di riferimento 'fisso' rispetto al quale determinare i movimenti dell'osservatore.

Per fondamentali ragioni dinamiche, ***il piano dell'eclittica è molto più stabile di quello equatoriale***, i cui movimenti sono maggiori, e ancor oggi conosciuti con qualche residua piccola incertezza.

Per quanto piccole, queste incertezze hanno notevole interesse astrofisico, perché limitano la precisione con cui possiamo conoscere ***il campo di forze complessivo*** della Via Lattea. Dunque ulteriori conoscenze sul moto dell'equatore sono interessanti non solo per il geofisico, ma anche per l'astronomo.

Prime considerazioni dinamiche

Il sistema equatoriale (α , δ) è il solo usato in cataloghi di alta precisione. Esso dipende dalla orientazione della Terra nello spazio e dalla sua rotazione (posizione del piano equatoriale rispetto alle stelle fisse, meridiano, Tempo Siderale), e dalla rivoluzione attorno al Sole (eclittica, punto γ). Il moto della Terra si può considerare come una combinazione di due moti non correlati, cioè una **traslazione del centro di massa** e una **rotazione** della figura attorno a un asse per il baricentro.

In prima approssimazione, il baricentro della Terra rivolge attorno al Sole come una particella puntiforme soggetta alla forza gravitazionale del Sole e dei pianeti. Più rigorosamente, sarebbe il baricentro del sistema Terra- Luna a seguire le leggi di Keplero se non ci fossero gli altri pianeti a perturbare l'orbita. Dunque, è preferibile identificare l'eclittica con il piano orbitale del sistema Terra-Luna e liberarlo dalle perturbazioni periodiche di Giove, Venere e degli altri pianeti. Il Sole comunque non è mai più di 2" sopra o sotto tale piano, per cui con buona approssimazione l'eclittica è ancora quella definita in precedenza.

Orientazione e rotazione della Terra - 1

La massa terrestre è $M_{\oplus} = 5.976 \times 10^{27}$ g, la massa degli oceani circa $10^{-4} M_{\oplus}$, e quella dell'atmosfera circa $10^{-7} M_{\oplus}$. La distribuzione di tali masse non ha simmetria sferica, e nemmeno del tutto azimutale.

La posizione dell'asse di rotazione istantaneo è influenzato dalla presenza della Luna e del Sole (che causano i moti di **precessione e nutazione forzate rispetto alle stelle fisse**). Inoltre, l'asse di rotazione diurna non coincide con l'asse polare del miglior ellissoide che rappresenta la figura terrestre: tale asse polare pertanto è in rotazione attorno all'asse di rotazione, e per l'osservatore fisso sulle Terra è l'asse di rotazione che appare descrivere una curva (beninteso molto piccola, con un diametro di circa 18 metri) attorno all'asse di figura (**nutazione libera, o Euleriana**).

La variabile orientazione rispetto alle stelle fisse indotta da Luna e Sole causa una **variazione delle coordinate equatoriali**. La nutazione euleriana causa invece una piccola **variazione delle latitudini astronomiche** (cioè dell'altezza del polo di rotazione sull'orizzonte) **e delle longitudini**.

Orientazione e rotazione della Terra - 2

Ai livelli di precisione raggiunti alla fine del XIX secolo, e ancor meglio con le odierne tecniche VLBI, si constata che la Terra non è del tutto rigida, ma elastica. Inoltre, ci sono importanti redistribuzioni di massa sia all'interno che alla superficie (alcune di carattere periodico, quali le maree, le correnti, i monsoni, altre di carattere secolare, ad es. il progressivo scioglimento dei ghiacciai, e altre ancora pressoché istantanee quali i forti terremoti interni) che fanno variare i momenti di inerzia della figura.

La rotazione non può dunque essere del tutto uniforme: all'epoca presente assistiamo a una **diminuzione secolare della durata del giorno**, cui si sovrappongono **fluttuazioni periodiche e bruschi cambiamenti**. Sono tutte complicazioni **piccole, e in prima approssimazione trascurabili**, ma sono comunque molto ben misurabili, per cui se ne può tener conto con molta precisione per riportarsi a condizioni ideali di orientazione inerziale e rotazione costante sia come direzione che come modulo.

La precessione degli equinozi - 1

La principale variazione delle coordinate astrali (non consideriamo qui la molto più piccola e veloce nutazione, ne parleremo in seguito) fu scoperta da Ipparco già nel 129 a.C., confrontando le sue determinazioni delle coordinate eclitticali di Spica (α Vir) con quelle misurate 144 anni prima da Timocari: mentre la latitudine eclittica era rimasta costante, la longitudine era aumentata di circa 2° (cioè di circa $50''.4$ all'anno). La stessa variazione si trovò ben presto presente in tutte le stelle.

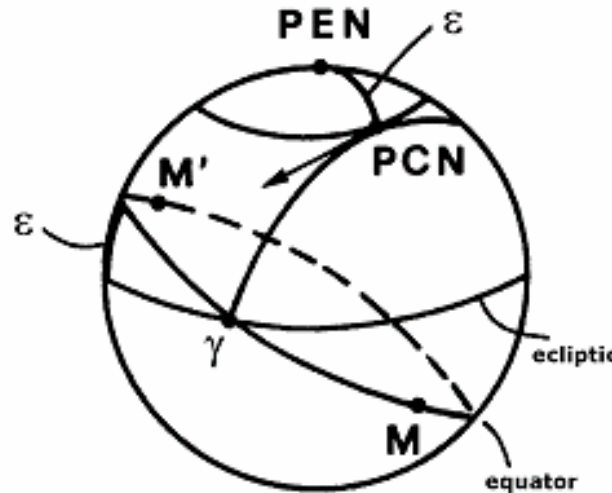
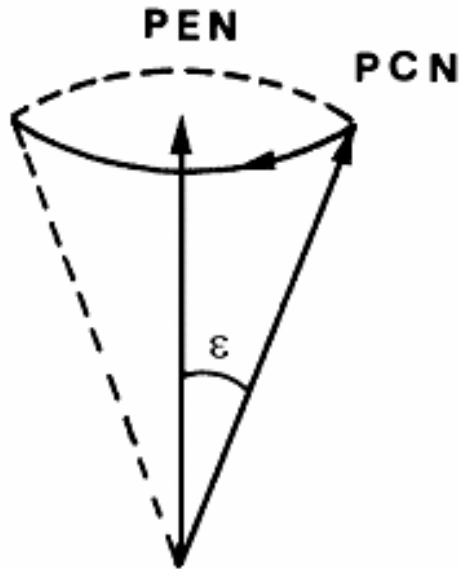
Ipparco ipotizzò che la sfera delle fisse ruoti in senso diretto attorno all'asse eclitticale, per cui il Sole incontra il punto γ ogni anno con un piccolo anticipo rispetto all'anno precedente, da cui il termine '*precessione degli equinozi*'. Con il passare dei secoli, la costellazione in cui il Sole entra in γ cambia apprezzabilmente; era Ariete ai tempi di Ipparco, oggi sono i Pesci, tra 2000 anni sarà in Acquario.

Solo 1600 più tardi Copernico diede la spiegazione corretta, è l'asse di rotazione terrestre che ruota rispetto a una sfera di stelle fisse descrivendo un cono di semi-apertura fissa ϵ attorno al polo eclittico, in un periodo di circa 25800 anni ($= 360^\circ/50''.4 \text{ y}^{-1}$, periodo talvolta chiamato *anno platonico*).

La precessione degli equinozi - 2

Nei limiti suddetti, il polo celeste PCN è ad ogni istante su un punto del cerchio minore distante ε dal polo eclitticale PEN, come si vede in figura. Dunque, il parallelo di latitudine eclittica $\beta = 90^\circ - \varepsilon$ è il luogo descritto dal PCN in 25800 anni.

Le figure mostrano due rappresentazioni equivalenti della precessione di Ipparco.



A sinistra, il vettore dal centro della Terra al PCN descrive un cono di semi-apertura fissa ε attorno al PEN, in verso retrogrado. A destra, il moto istantaneo di PCN è un vettore tangente sia al cerchio minore distante ε dal PEN che al coluro vernale.

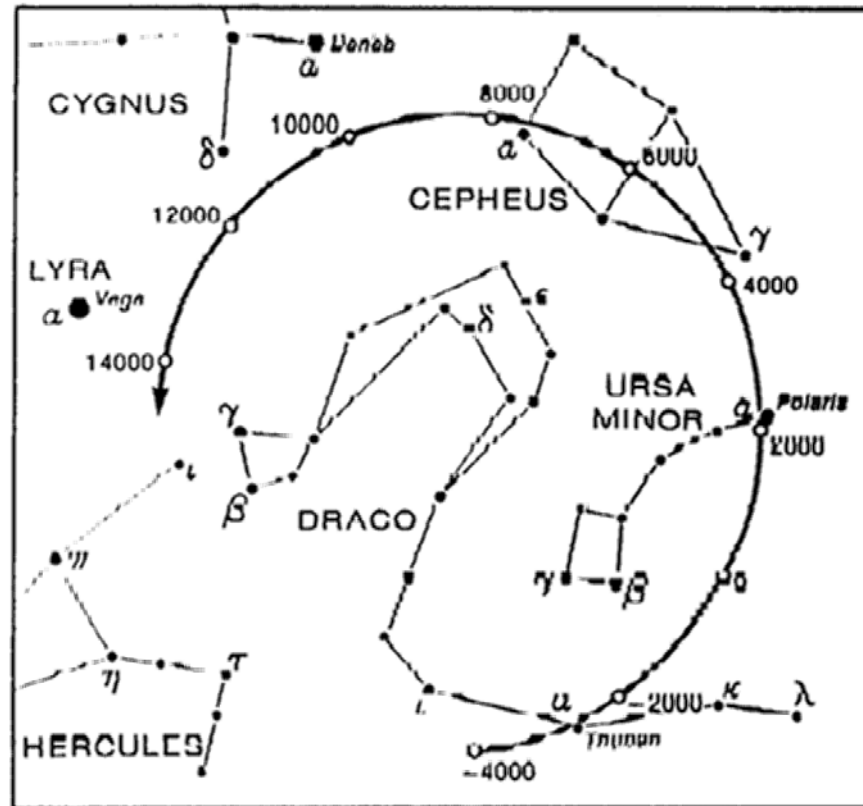
La posizione dei poli celesti

Durante questo movimento, il polo celeste verrà visto in costellazioni differenti; oggi, PCN è vicino alla stella brillante α Umi (stella Polare). L'odierna distanza di circa 45' diminuirà a un valore minimo di 27' nel 2102, e poi progressivamente si allontanerà di nuovo.

Non c'è una stella brillante vicina al polo celeste Sud. L'*Astronomical Almanac* usa come stella utile per ottenere le latitudine la stella σ Octantis, di magnitudine visuale 5.5.

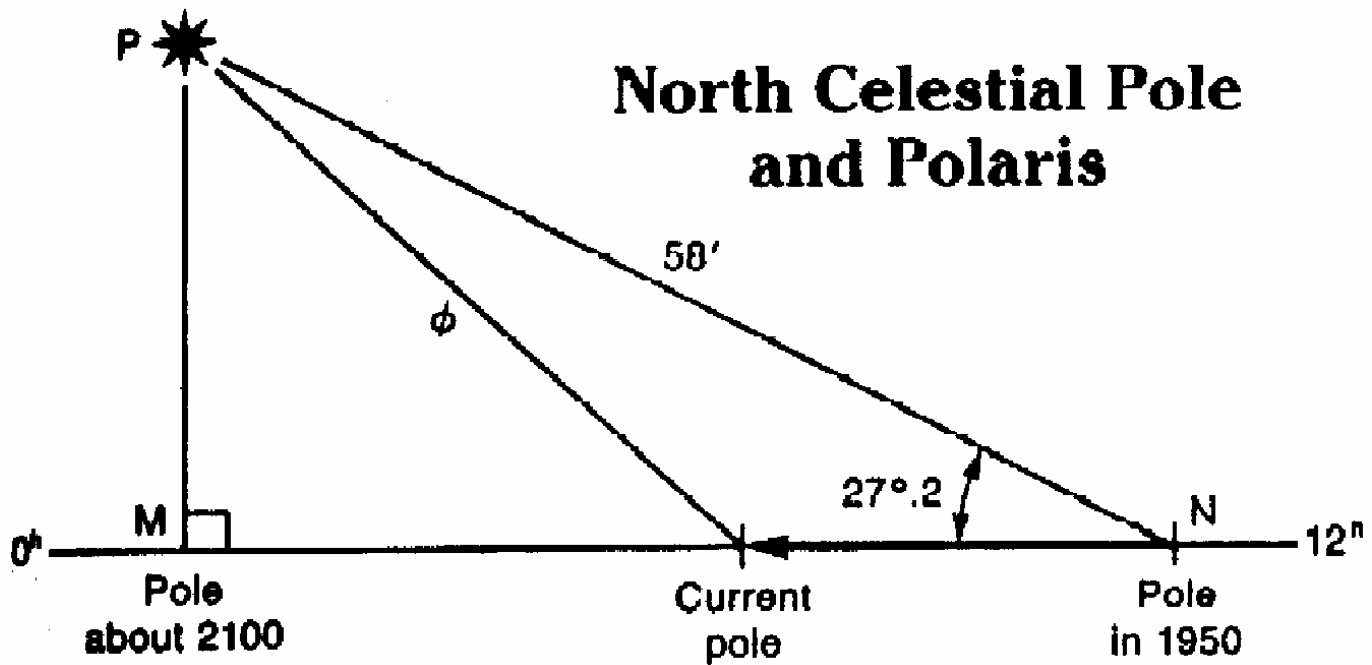
La posizione del polo celeste Nord nei millenni

Un osservatore nell'emisfero boreale, rivolto verso il polo eclitticale vede il polo celeste spostarsi progressivamente in senso diretto come in Figura, tra il 4000 aC e il 14000 dC :



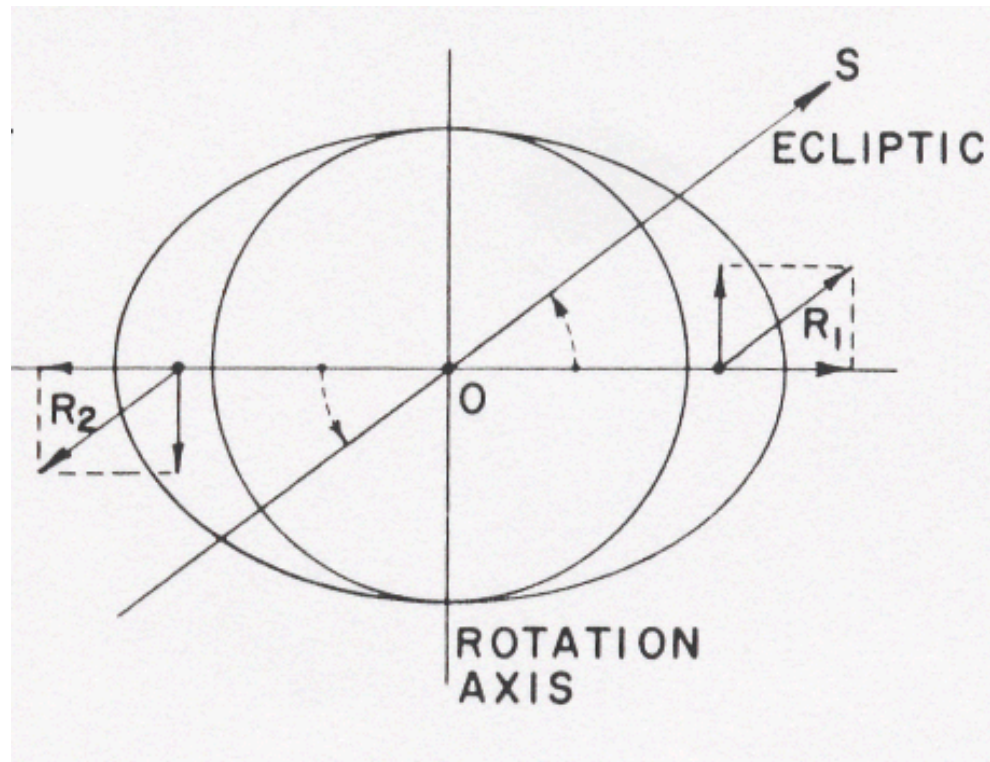
La posizione futura del Polo Celeste Nord

La distanza tra la Stella Polare (α UMi) e PCN sta progressivamente decrescendo, e raggiungerà il valore minimo di 27' verso l'anno 2100 (v. Figura)



La spiegazione di Newton (1687) - 1

Il fenomeno descritto da Copernico fu spiegato dinamicamente da Newton nei *Principia* (1687): si deve considerare la forma della Terra, che non può essere a simmetria sferica (si faccia attenzione, *non è* la figura geometrica che interessa, ma la distribuzione delle masse interne). La figura è più simile a uno *sferoide oblato* di rivoluzione attorno all'asse polare che a una sfera.



La spiegazione di Newton (1687) - 2

Dunque l'asse equatoriale deve essere più lungo dell'asse polare. Pertanto il Sole, che *di solito* non è sul piano dell'equatore terrestre, esercita una coppia di forze sull'asse di rotazione che tenderebbe a far coincidere tale direzione con la normale alla congiungente al Sole stesso, cioè a far coincidere l'equatore con l'eclittica. Tuttavia l'asse polare è in rotazione, per cui la coppia lo fa muovere *perpendicolarmente al piano Terra - Sole* (spesso si fa una analogia con la trottola, ma mentre nella trottola rotazione e precessione hanno lo stesso verso, nel caso Terra - Luna le due sono opposte).

La Luna esercita lo stesso effetto. Tuttavia, siccome l'ampiezza della coppia è proporzionale alla *massa* del corpo forzante e al *cubo della distanza* dalla Terra, l'effetto della Luna è oltre due volte maggiore di quello del Sole. Da qui il termine di precessione *luni-solare*.

La nutazione

La descrizione dell'effetto data da Ipparco e da Copernico, e la spiegazione di Newton, devono essere solo parzialmente corrette, per due ragioni:

- 1 - il piano dell'orbita lunare è inclinato sull'eclittica di circa $5^{\circ}9'$,
- 2 - la distanza Terra - Luna cambia apprezzabilmente nel corso del mese lunare (e, anche se molto meno, quella Terra - Sole nel corso dell'anno).

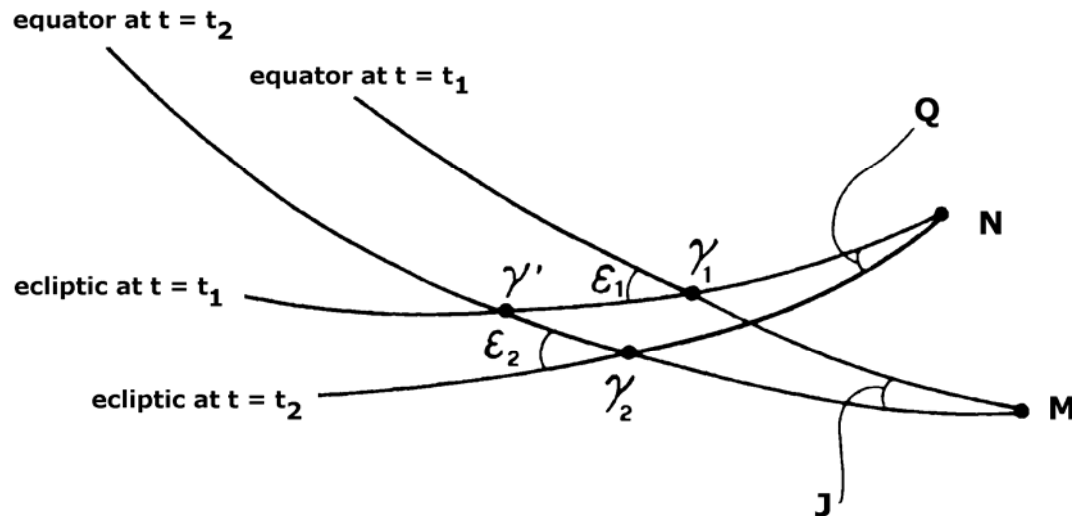
Pertanto il moto del polo celeste non può essere semplicemente una rivoluzione sul parallelo di latitudine eclittica $90^{\circ} - \varepsilon$. Ci deve essere tutta una serie di movimenti *ciclici di diversa ampiezza e periodo, che interessano anche l'obliquità istantanea*. Siccome però questi termini sono periodici, cioè non si accumulano come quelli precessionali, non erano osservabili prima dell'avvento dei telescopi dei passaggi nel XVII secolo. Il primo che osservò tali movimenti fu l'astronomo inglese Bradley grazie alla sua lunga serie di osservazioni di γ Dra (stella non molto distante dal polo eclitticale): la declinazione della stella, corretta rimuovendo la precessione luni-solare, cresceva di circa $18''$ dal 1727 al 1736, e decresceva della stessa quantità dal 1736 al 1745, come se il polo celeste avesse un piccolo movimento oscillatorio che Bradley chiamò *nutazione*, di ampiezza $\pm 9''$ e periodo 18.6 anni attorno a una posizione media. Tale periodo è esattamente quello della *retrogradazione dei nodi dell'orbita lunare sull'eclittica*.

Il moto dell'eclittica

C'è un ulteriore effetto da tenere in considerazione. Sinora abbiamo assunto che il piano dell'eclittica sia fisso rispetto alle stelle. Ma non può essere proprio così, causa le perturbazioni esercitate dai pianeti, in particolare da Giove e da Venere sulla giacitura del piano. L'effetto venne osservato nel XVIII secolo più o meno allo stesso tempo che Eulero lo aveva teoricamente predetto. All'epoca presente l'obliquità dell'eclittica **decresce** di circa $0''.47$ all'anno. L'influenza dei pianeti deve ultimamente essere un effetto periodico, ma tale periodo è così lungo (decine di migliaia di anni) che per molti secoli si comporta come se fosse progressivo (per meglio dire secolare), proprio come la precessione luni-solare. Da qui la decisione di chiamare l'effetto ***precessione planetaria*** e di includerla matematicamente nei termini della **precessione generale**. A causa del segno negativo, la precessione planetaria rende un po' più piccola di $50''.4$ la costante di precessione.

A tutto rigore, ci dovrebbe essere anche una nutazione planetaria; tuttavia, i movimenti dell'eclittica rispetto all'equatore non cambiano le declinazioni stellari, ma solo le loro ascensioni rette, e dunque la nutazione planetaria si mescola con le incertezze sull'origine, e in ogni caso non si nota in misure differenziali.

I movimenti dei piani fondamentali - 1



Si considerino allora i due piani fondamentali alle due date t_1 e t_2 (con t_2 dopo t_1 per fissare il verso) che si intersecano in γ_1 e γ_2 , con obliquità ε_1 e ε_2 rispettivamente.

Ciascun elemento, ad es. l'angolo J, si può ritenere composto di due parti:

1. una secolare (cioè con periodo lunghissimo)
2. una a corto periodo.

I movimenti dei piani fondamentali - 2

Durante parecchi decenni, o anche secoli, un elemento, ad es. l'angolo $J(t)$, si può sviluppare in una serie temporale di cui manteniamo solo i primi termini, più una parte periodica $n(t)$:

$$J(t) = at + bt^2 + ct^3 + \dots + n(t) - n(t_0)$$

dove i termini secolari (precessione) ***sono nulli all'epoca iniziale, ma non così i termini periodici*** (nutazione). Allo stesso modo procediamo per gli altri elementi

Gli elementi istantanei si dicono elementi **veri** (equatore vero, equinozio vero, obliquità vera, etc.), quelli ricavati dai soli effetti secolari (senza considerare la nutazione) si dicono elementi **medi** (equatore medio, equinozio medio, obliquità media, etc.)

Effetti al primo ordine della precessione - 1

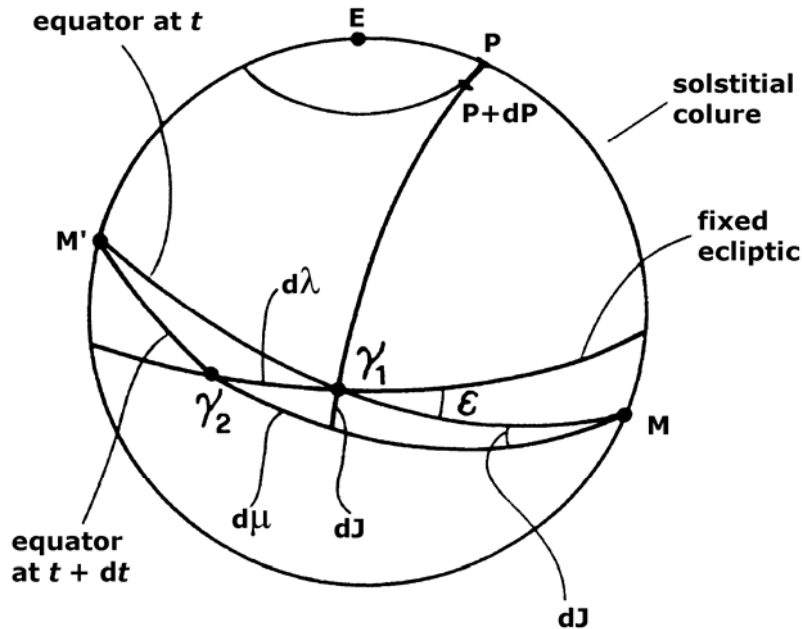
Chiamiamo dunque **precessione luni-solare**, senza altri aggettivi, l'effetto che si avrebbe su una Terra **rigida** da una coppia luni-solare costante. L'effetto sarebbe una *rotazione rigorosamente periodica del polo celeste attorno a quello eclitticale, con velocità angolare e obliquità ε costanti*.

Dunque le longitudini crescerebbero con velocità uniforme:

$$\dot{\lambda} = \psi \approx +50''.37 \quad (\text{per anno } \textit{tropico})$$

Questo valore di ψ (che è la notazione usuale) è determinato per 1/3 dal Sole e per 2/3 dalla Luna. Esso dipende ovviamente dagli **elementi orbitali** dei due corpi forzanti, dalla **obliquità dell'eclittica ε** e dai **momenti di inerzia** della Terra.

Effetti al primo ordine della precessione - 2



Nell'ipotesi di *eclittica fissa*, dopo un tempo elementare $dt = 1$ anno, l'equatore mobile avrà fatto una rotazione elementare dJ attorno al diametro MM' , e allo stesso tempo il polo celeste si sarà mosso da P a $P + dP$ lungo il cerchio orario dell'equinozio iniziale γ_1 , cosicché $dP = dJ$.

L'intersezione tra l'eclittica e l'equatore si sarà mossa da γ_1 a γ_2 , descrivendo **la precessione elementare in longitudine**:

$$d\lambda = \psi dt = \frac{dJ}{\sin \epsilon} \approx +50''.37$$

Precessione in AR e DEC - 1

La proiezione di questo arco elementare sull'equatore mobile dà la precessione luni-solare in ascensione retta:

$$d\mu = \psi dt \cos \varepsilon = \frac{dJ}{\sin \varepsilon} \cos \varepsilon \approx +46''.21$$

mentre la componente perpendicolare lungo il cerchio orario di γ_1 è la precessione luni-solare in declinazione:

$$n = dJ = (\psi dt) \cos \varepsilon \sin \varepsilon \approx +20''.05$$

Ritornando a velocità angolari, si ponga:

$$m = \psi \cos \varepsilon \quad (m = +46''.21/y = +3^s.08/y)$$

$$n = \psi \sin \varepsilon \quad (n = +20''.34/y = +1^s.34/y)$$

dove y è da intendersi qui come anno **tropico**, cioè come intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi del Sole per γ . Oggi si preferisce usare l'anno **giuliano** (si veda più avanti), con una lieve differenza del valore numerico delle costanti di precessione.

Precessione in AR e DEC - 2

Prendendo i differenziali della trasformazione tra coordinate eclittiche e equatoriali:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \dot{\beta} \quad , \quad d\delta = \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \dot{\beta}$$

e con le ipotesi iniziali: $\dot{\beta} \equiv 0$, $\dot{\varepsilon} \equiv 0$

deriviamo facilmente le due espressioni:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\lambda}(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta) = \\ &= m + n \sin \alpha \tan \delta \approx [3^s.08 + 1^s.34 \sin \alpha \tan \delta] \quad y^{-1} \end{aligned}$$

$$\dot{\delta} = \dot{\lambda} \sin \varepsilon \cos \alpha = n \cos \alpha \approx 20''.05 \cos \alpha \quad y^{-1}$$

Precessione in AR e DEC - 3

Per molte applicazioni, si devono precessare le coordinate di un'epoca iniziale (quelle del catalogo fondamentale) alle coordinate medie a una data finale non troppo distante, mettiamo al più 25 anni. Procediamo come si faceva prima del 1984, utilizzando un catalogo come l'AGK3, che dà le coordinate equatoriali all'equinozio B1950.0 (vedremo più avanti il significato dell'anno besseliano B), per un insieme di stelle dell'emisfero nord. Vogliamo ottenere le coordinate equatoriali medie alla data B1950.0+ t (t in anni tropici e sue frazioni).

In prima approssimazione basteranno le seguenti formule:

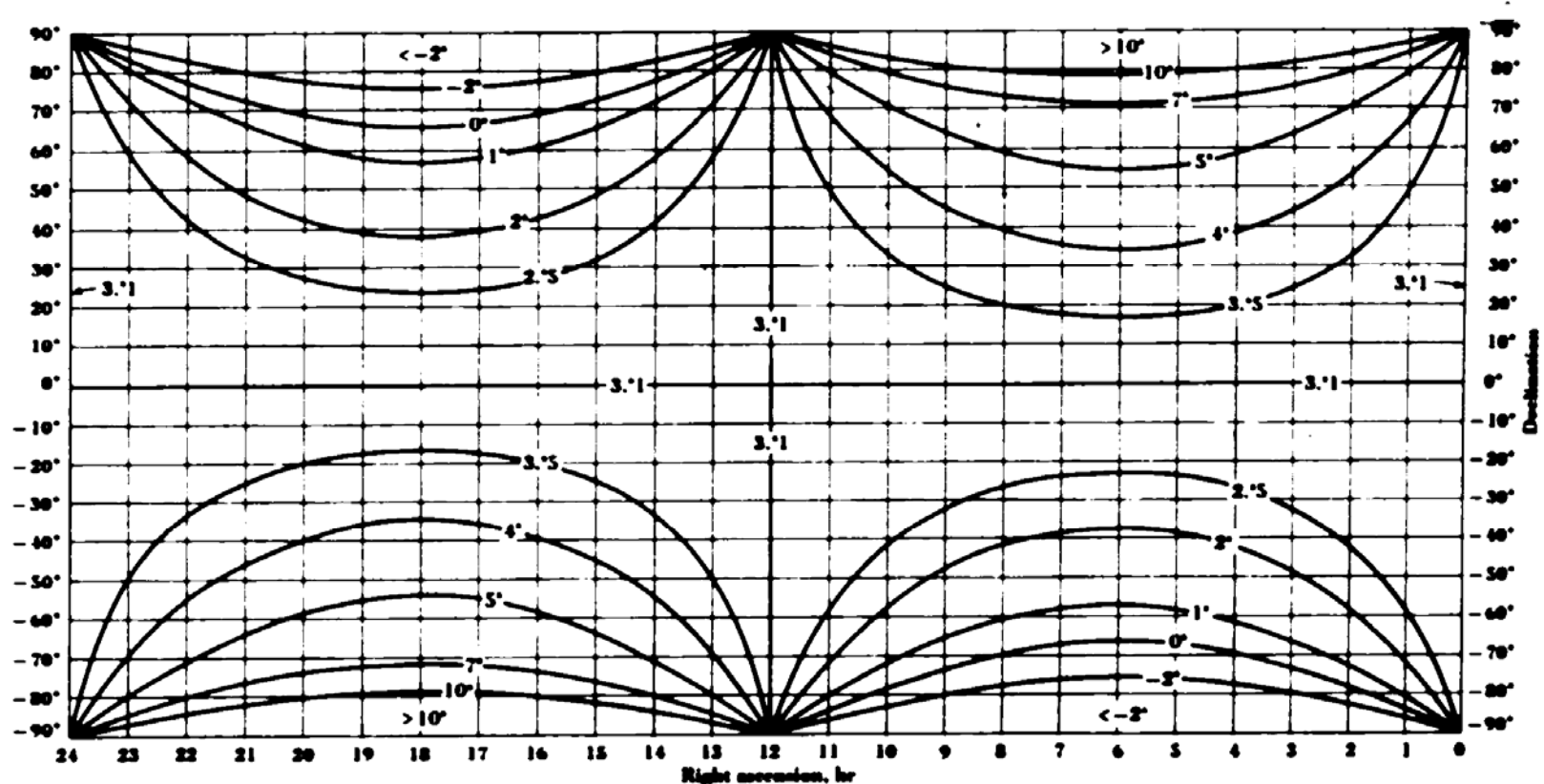
$$\alpha_{1950+t} = \alpha_{1950} + (m_{1950} + n_{1950} \sin \alpha_{1950} \tan \delta_{1950})t$$

$$\delta_{1950+t} = \delta_{1950} + n_{1950} \cos \alpha_{1950} t$$

Si noti che $d\alpha/dt$ diviene molto grande in prossimità dei poli celesti, per cui i conti qui diventano critici.

Rappresentazione grafica della precessione in AR

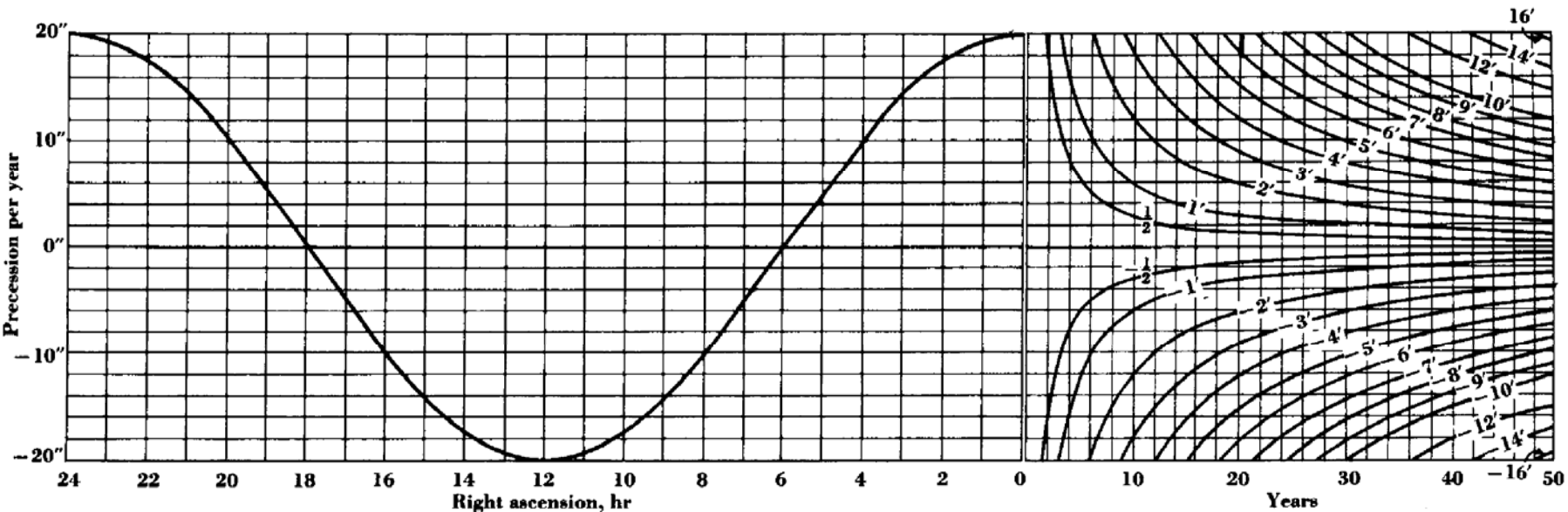
Questo diagramma è una rappresentazione della precedente formula di prima approssimazione per l'AR:



La precessione annua in ascensione retta, in funzione di (α, δ) . Si notino i valori generalmente positivi tranne che in prossimità del Polo Nord tra 12h e 24h e del Polo Sud tra 0h e 12h.

Rappresentazione grafica della precessione in Dec

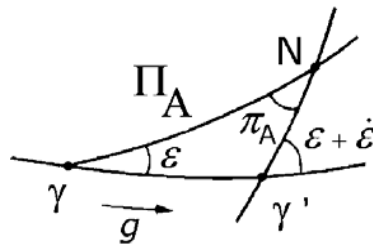
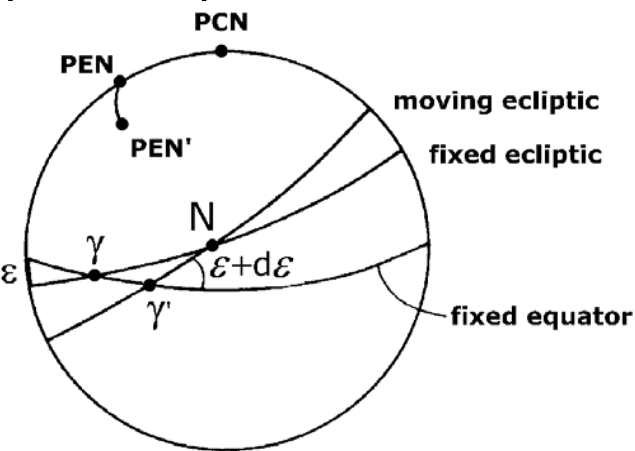
Questo diagramma è una rappresentazione della precedente formula di prima approssimazione per la Dec:



La precessione annua in δ dipende solo da α , e' nulla a 6h e 18h, intervallo al cui interno e' negativa. Sulla destra il valore della precessione in primi d'arco per un intervallo temporale tra 0 e 50 anni.

La precessione planetaria

Consideriamo ora la precessione planetaria, cioè l'effetto delle perturbazioni gravitazionali dei pianeti sulla giacitura dell'eclittica, e dunque sulla obliquità. La precedente discussione della precessione luni-solare ci ha dato modo di fissare l'equatore tra le stelle. Dunque ora dobbiamo vedere il (piccolo) effetto della precessione del polo eclitticale attorno a quello equatoriale, che possiamo rappresentare come una rotazione elementare dell'eclittica attorno a una retta passante per N:



Tale rotazione elementare dell'eclittica muove γ in senso *diretto lungo l'equatore*, di circa:

$$g = 0''.13 \text{ y}^{-1}$$

che si devono sottrarre dal valore della precessione luni-solare per ottenere il valore della precessione generale: $G = \psi - g \cos \varepsilon = +50''.26 \text{ y}^{-1}$

Ne consegue che il valore della costante $m = \psi \cos \varepsilon - g$ decresce a circa $46''.07 \text{ y}^{-1} = 3^{\text{s}}.07 \text{ y}^{-1}$. La *precessione in Declinazione non viene alterata*.

La diminuzione dell'obliquità ε - 1

C'è una seconda conseguenza di questa rotazione dell'eclittica attorno a N, cioè la piccola diminuzione della obliquità stessa. Riferendoci alla precedente figura, si consideri il triangolo elementare $\gamma N \gamma'$, dove γ' è la posizione di γ *sull'equatore fisso dopo un anno*, Π_A è la longitudine di N (circa $174^\circ.85$ all'epoca presente) e π_A è l'angolo in N (cioè l'inclinazione della eclittica mobile, a quella data, su quella fissa); dalle leggi di trasformazione otteniamo:

$$\sin \Pi_A \sin \pi_A = \sin g \sin(\varepsilon + \dot{\varepsilon})$$

$$\cos \varepsilon \cos g = \sin g \cot \Pi_A + \sin \varepsilon \cot(\varepsilon + \dot{\varepsilon})$$

$$\text{con } g, \dot{\varepsilon}, \pi_A \ll$$

da cui:

$$g = \pi_A \sin \Pi_A \operatorname{cosec} \varepsilon \quad , \quad \dot{\varepsilon} \approx \pi_A \cos \Pi_A \approx -0''.47 \quad \text{y}^{-1}$$

La diminuzione dell'obliquità ε - 2

Dopo τ anni, l'inclinazione dell'eclittica mobile sarà:

$$\pi_A \approx \dot{\varepsilon} \tau / \cos \Pi_A$$

L'obliquità dell'eclittica è dunque lentamente in diminuzione (ma è parte di un lunghissimo ciclo periodico).

Tycho Brahe ne ottenne una determinazione precisa nel 1590, trovando $\varepsilon = 23^\circ 30'$, mentre oggi ε è più vicina a $23^\circ 26'$.

Di conseguenza, nessuna delle 'costanti' $\psi, m, n, G, g, \Pi_A, \pi_A$, è davvero una costante.

Una ulteriore causa di variazione delle costanti è collegata sia con le variazioni secolari delle configurazioni orbitali che dei cambiamenti dei momenti di inerzia della Terra.

Ci si deve aspettare pertanto che il sistema delle costanti precessionali venga di tanto in tanto rivisto.

Precessione in RA e DEC – dopo il 1984

Dal 1984, l'Unione Astronomica Internazionale (IAU) ha adottato **un nuovo sistema di costanti**, di cui alcune sono qui riprodotte:

$$G = 50''.290966 + 0''.02222 T \quad , \quad \varepsilon = 23^\circ 26' 21''.448 - 0''.00468150 T$$

$$m = 46''.124362 + 0''.02793 T \quad , \quad n = 20''.043109 - 0''.008533 T$$

$$\dot{\varepsilon} = 0''.46815 - 0.00007T \quad , \quad g \cos \varepsilon = 0''.1055 - 0''.0189T$$

dove T è il numero of **secoli Giuliani** di 365.25 giorni di 86400 secondi .

Attenzione: l'unità di tempo non è più l'anno tropico, ma l'anno giuliano! (nota: il rapporto tra la durata del secolo giuliano e di quello besseliano è 1.00002136, e non rende conto della forte revisione di G), mentre la nuova epoca fondamentale è il **J2000**.

Inoltre, è divenuto abitudine calcolare le coordinate medie **non per l'inizio ma per la metà dell'anno**.

Alcune formule più precise - 1

Un piccolo raffinamento migliorerà la precisione, se si conoscono le variazioni nel tempo delle 'costanti' :

- si derivino i valori delle 'costanti' all'epoca intermedia tra t_0 and t , e si calcolino le due altre 'costanti' M , N :

$$t_{1/2} = \frac{(t_0 + t)}{2} \quad , \quad M = m_{1/2}(t - t_0) \quad , \quad N = n_{1/2}(t - t_0)$$

- usando questi valori di M , N , si derivino i valori delle coordinate ($\alpha_{1/2}$, $\delta_{1/2}$) all'epoca intermedia:

$$\alpha_{1/2} = \alpha_0 + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N \sin \alpha_0 \tan \delta_0 \quad , \quad \delta_{1/2} = \delta_0 + \frac{1}{2}N \cos \alpha_{1/2}$$

e finalmente:

$$\alpha = \alpha_0 + M + N \sin \alpha_{1/2} \tan \delta_{1/2} \quad , \quad \delta = \delta_0 + N \cos \alpha_{1/2}$$

Alcune formule più precise - 2

Questi metodi approssimati non sono però sufficienti se la stella è vicina al polo oppure se l'intervallo di tempo è grande.

Potremmo considerare altri termini dello sviluppo in serie di $\alpha(t)$, $\delta(t)$:

$$\alpha_{1950+t} = \alpha_{1950} + \dot{\alpha}_{1950}t + \frac{1}{2!}\ddot{\alpha}_{1950}t^2 \quad , \quad \delta_{1950+t} = \delta_{1950} + \dot{\delta}_{1950}t + \frac{1}{2!}\ddot{\delta}_{1950}t^2$$

le cui espressioni e valori devono tener conto anche della variazione delle 'costanti' (vedi **Esercizi**).

Usando secoli giuliani per T , le costanti precessionali necessarie diventano:

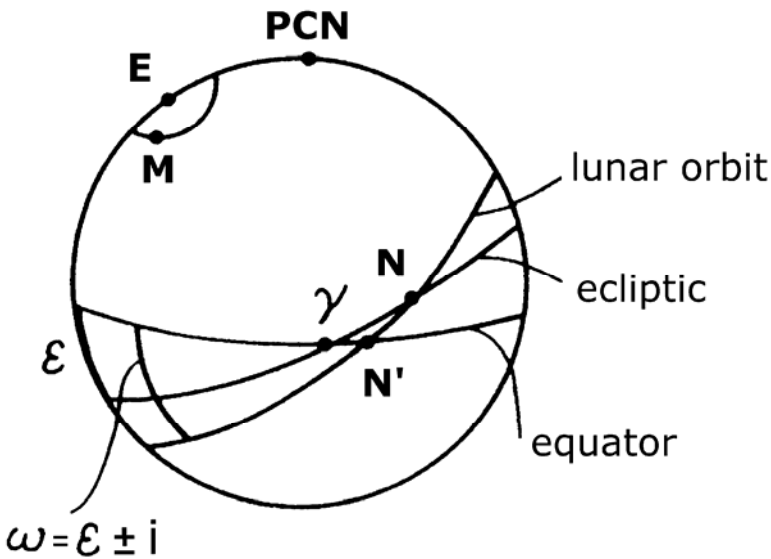
$$M = 1^{\circ}.2812323 T + 0^{\circ}.0003879 T^2 + 0^{\circ}.0000101 T^3$$

$$N = 0^{\circ}.5567530 T - 0^{\circ}.0001185 T^2 - 0^{\circ}.0000116 T^3$$

Tuttavia, il metodo più preciso è quello di ricorrere al formalismo di Newcomb, come vedremo tra breve.

La nutazione - 1

Abbiamo chiamato **nutazione** l'insieme dei movimenti a corto periodo dell'equatore. La parte principale, quella scoperta da Bradley, è dovuta all'influenza della Luna, il cui piano orbitale è inclinato di circa $i = 5^{\circ}9'$ su quello dell'eclittica.



Sia N il nodo ascendente dell'orbita lunare sull'eclittica, e N' quello sull'equatore (*ascendente* indica quel nodo in cui la latitudine eclittica della Luna passa da negativa a positiva). I due nodi non sono fissi nello spazio inerziale: N precessa lungo l'eclittica in senso retrogrado, di circa $191''$ ogni giorno (cioè circa 3 diametri lunari a ogni lunazione, verso Ovest; il cammino della Luna tra le stelle è davvero molto complicato), compiendo un giro completo in 18.6 anni.

La nutazione - 2

Corrispondentemente, nello stesso periodo il polo M dell'orbita lunare descrive un piccolo cerchio di raggio i attorno al polo eclittico E .

Di conseguenza, la declinazione della Luna varia tra circa $\pm 18^\circ.8$ e $\pm 28^\circ.8$, a seconda della longitudine del nodo $\lambda(N)$, la cui espressione è:

$$\lambda(N) = 125^\circ.04452 - 19^\circ.341363t + 0^\circ.00002971t^2$$

se t è in anni giuliani dal J2000.0.

Quando la longitudine del nodo $\lambda(N) = 0$ (come fece nel 2006.4), il nodo coincide con γ , l'inclinazione assume il massimo valore possibile ($\omega = +28^\circ 36'$), e la declinazione raggiunge $\pm 28^\circ 36'$ durante una lunazione.

Quando $\lambda(N) = 180^\circ$ (9.3 anni dopo), il nodo coincide con l'equinozio di autunno, l'inclinazione sull'equatore è la minima possibile ($\omega = +18^\circ 18'$), e la declinazione varia tra $\pm 18^\circ 18'$.

La nutazione - 3

Consideriamo ora il nodo ascendente N' sull'equatore, e il triangolo sferico PEL; N' oscillerà in 18.6 anni attorno a γ con ampiezza di circa $\pm 13^\circ$. Infatti:

$$\sin \gamma N' = \sin \gamma N \frac{\sin i}{\sin \omega} \quad \omega = \varepsilon \pm i \quad |\gamma N'| \leq \arcsin\left(\frac{\sin i}{\sin \omega}\right) \approx 13^\circ$$

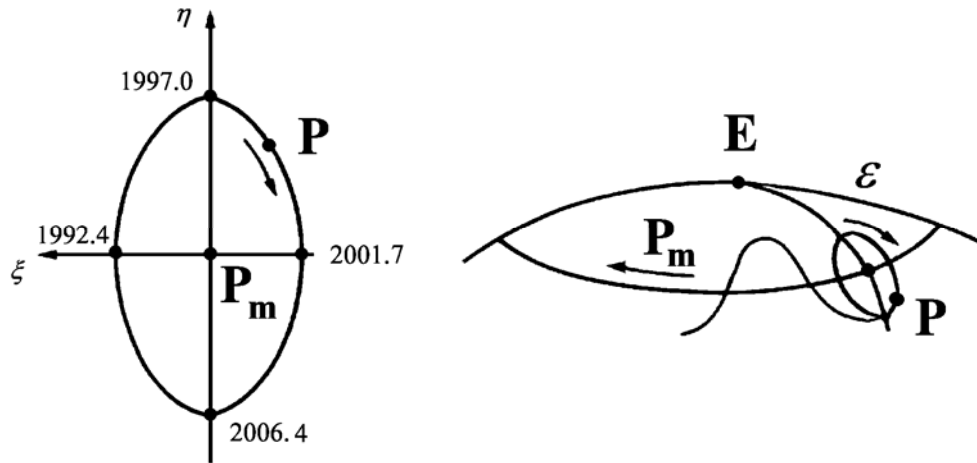
Dunque, il moto istantaneo del polo non sarà più lungo il grande cerchio $P\gamma$, ma lungo PN' , cosicché la nutazione cambia non solo l'origine delle longitudini, ma anche l'obliquità. Secondo le misure di Bradley:

$$\Delta \lambda = -17''.2 \sin \lambda(N)$$

$$\Delta \varepsilon = 9''.2 \cos \lambda(N)$$

La nutazione - 4

Tale movimento si può visualizzare così: il polo istantaneo P descrive un cono retrogrado attorno al polo medio P_m , che a sua volta descrive un cono di apertura ϵ attorno a E . Se vedessimo tale movimento dall'esterno della volta celeste osserveremo un cammino come nella figura:



Sul piano tangente alla volta celeste in P_m , il luogo occupato da P è un'ellisse di semi-asse maggiore $\Delta y = 9''.2$, e di semi-asse minore $\Delta x = 17''.2 \sin \epsilon = 6''.9$, descritto con periodo di 18.6 anni in senso retrogrado.

Il rapporto tra i due assi fu giustificato su basi dinamiche da d'Alembert, che dimostrò che deve valere $\cos 2\epsilon / \cos \epsilon$.

La nutazione - 5

Il fenomeno completo della nutazione contiene molti altri termini di minore ma non trascurabile ampiezza; il secondo termine in longitudine ha ampiezza di $1''.32$, e in obliquità di $0''.57$. Questi valori cambiano lentamente con l'epoca.

Si usa indicare la completa nutazione in longitudine con $\Delta\psi$, e quella in obliquità con $\Delta\varepsilon$.

La nutazione in longitudine ha la stessa struttura della precessione luni-solare:

$$\Delta\alpha = \Delta\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta) \quad , \quad \Delta\delta = \Delta\psi(\sin\varepsilon\cos\alpha)$$

Il termine in obliquità causa una variazione di ε , ma non affetta γ ; dopo pochi semplici calcoli otteniamo:

$$\Delta\alpha = -\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta \quad , \quad \Delta\delta = \Delta\varepsilon\sin\alpha$$

La nutazione - 6

In totale, la nutazione ammonta a :

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \Delta\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \tan\delta) - \Delta\varepsilon \cos\alpha \tan\delta \\ \Delta\delta = \Delta\psi \sin\varepsilon \cos\alpha + \Delta\varepsilon \sin\alpha \end{cases}$$

Ad es., per l'anno 2000 e con una precisione di 1", l'**Astronomical Almanac** dà le seguenti espressioni numeriche:

$$\begin{cases} \Delta\psi = -0^{\circ}0048 \sin(125^{\circ}.1 - 0.053d) - 0^{\circ}.0004 \sin(198^{\circ}.0 + 1.971d) \\ \Delta\varepsilon = +0^{\circ}.0026 \cos(125^{\circ}.1 - 0.053d) + 0^{\circ}.0002 \cos(198^{\circ}.0 + 1.971d) \end{cases}$$

essendo $d = \text{JD} - 2451543.5$ (2451544 è il JD a Greenwich *al mezzogiorno* dello 0 gennaio 2000) .

Si noti la struttura della data, 0 gennaio indicando il 31 dicembre dell'anno prima. Si veda più avanti per la definizione di JD.

Precessione più nutazione

Sommando ora precessione e nutazione, dopo alcuni passaggi otteniamo:

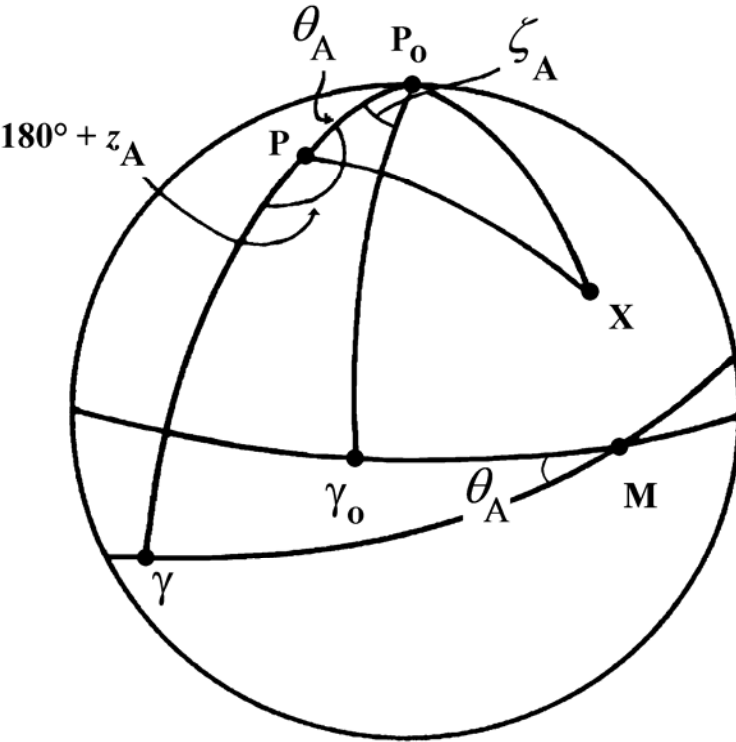
$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= A(m + n \sin \alpha \tan \delta) + B \cos \alpha \tan \delta + E' \\ &= Aa' + Bb' + E'\end{aligned}$$

$$\Delta\delta = An \cos \alpha - B \sin \alpha = Aa'' + Bb''$$

A, **B**, **E'** essendo opportune funzioni della data (ma non delle coordinate della stella) chiamate **numeri giornalieri di Bessel**, mentre le costanti a' , a'' , b' , b'' dipendono solo dalle coordinate della stella e si dicono **costanti stellari di Bessel** (si veda il particolare Almanacco per la precisa definizione di tali costanti).

Si può anche far ricorso a un formalismo diverso, introducendo le funzioni **f**, **g**, **G** che vengono dette **numeri giornalieri indipendenti** (*independent day numbers*). Si veda l'**Astronomical Almanac** per la loro espressione.

Gli angoli di Newcomb- 1



Sia X una stella 'fissa', P_0 e P due successive posizioni del polo Nord celeste alle due date t_0 e t . Nel triangolo sferico P_0PX si consideri l'arco θ_A e gli angoli ζ_A , z_A . L'angolo ζ_A sarà molto piccolo per piccoli $(t-t_0)$, e così sarà z_A , dato che l'arco $(P_0P + P\gamma)$ differisce molto poco da un cerchio massimo; ad ogni modo sarà sempre $\zeta_A \approx z_A$. L'arco θ_A non è proprio il cammino descritto dal polo, che sarà piuttosto una curva irregolare tra i due punti:

$$\begin{cases} \cos \delta \sin(\alpha - z_A) = \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) \\ \cos \delta \cos(\alpha - z_A) = \cos \theta_A \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin \theta_A \sin \delta_0 \\ \sin \delta = \sin \theta_A \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta_A \sin \delta_0 \end{cases}$$

Gli angoli di Newcomb- 2

Gli elementi (θ_A, ζ_A, z_A) sono dati da:

$$\begin{cases} \zeta_A = 0^\circ.6406161T + 0^\circ.0000839T^2 \\ z_A = \zeta_A + 0^\circ.000202T^2 \\ \theta_A = 0^\circ.5567530T - 0^\circ.0001185T^2 \end{cases} \quad (T \text{ in secoli giuliani dal J2000.0})$$

Le stesse trasformazioni si possono esprimere come matrice di rotazione \mathbf{P} applicata a un sistema cartesiano iniziale (x_0, y_0, z_0) per derivare (x, y, z) e viceversa, cioè $\mathbf{r} = \mathbf{P}\mathbf{r}_0$ o $\mathbf{r}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}$, i cui elementi si possono ricavare dalle precedenti espressioni. Per esempio:

$$P_{11} = -\sin \zeta_A \sin z_A + \cos \zeta_A \cos z_A \cos \vartheta_A$$

Per includere la nutazione, la rotazione \mathbf{P} sarà seguita dalla rotazione \mathbf{R}_N :

$$\mathbf{R}_N = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Precessione e angoli di posizione

Precessione e nutazione sono, con grande precisione, rotazioni rigide della volta celeste, e dunque non alterano le distanze angolari tra le stelle. La forma di una costellazione **non** sarà dunque alterata da questi effetti (le distanze relative cambieranno causa i moti propri, ma questo è un altro effetto che vedremo in seguito). Tuttavia, l'angolo di posizione **p** tra due astri cambierà perché esso è misurato dalla variabile direzione del polo Nord celeste. Dopo pochi passaggi troviamo facilmente che:

$$\Delta p / \Delta t = n \sin \alpha \sec \delta = 0^\circ.0056 \sin \alpha \sec \delta$$

Allo stesso modo, le coordinate relative di due astri tra loro vicini ($\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$, $\delta_1 \approx \delta_2 \approx \delta$) cambieranno di:

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} \approx n \sec \delta [\Delta\alpha \cos \alpha \sin \delta + \Delta\delta \sin \alpha \sec \delta] \quad , \quad \frac{d\Delta\delta}{dt} \approx -n\Delta\alpha \sin \alpha$$

L'effetto è molto forte in vicinanza dei poli. Dunque in generale il valore dell'angolo di posizione deve essere riferito a una epoca precisa.