

Esercizi

Area del triangolo sferico per 3 stelle -1

Le coordinate di 3 stelle in un generico riferimento sferico siano:

$$(\alpha, \delta)_A = (0^\circ, 0^\circ), \quad (\alpha, \delta)_B = (1^\circ, 0^\circ), \quad (\alpha, \delta)_C = (1^\circ, 1^\circ)$$

Ricavare gli elementi e l'area del triangolo.

Il triangolo ha lati sufficientemente piccoli da potersi considerare piano, con angolo retto nel secondo vertice.

Pertanto l'area sarà $A = \frac{1}{2}$ gradi quadrati $= 1.2 \times 10^{-5}$ sr.

Area del triangolo sferico per 3 stelle - 2

Ripetiamo l'esercizio con:

$$(\alpha, \delta)_A = (0^\circ, 0^\circ), \quad (\alpha, \delta)_B = (15^\circ, 0^\circ), \quad (\alpha, \delta)_C = (15^\circ, 45^\circ)$$

In questo caso il triangolo deve essere considerato completamente sferico.

Due lati valgono rispettivamente $c = 15^\circ$ e $a = 45^\circ$, mentre l'angolo in B è retto.

Ricaviamo dalla I formula di Gauss il lato b che passa per A e per C:

$$b = 46^\circ.9205 \quad , \quad \sin b = 0.703406$$

Area del triangolo sferico per 3 stelle -3

Dalla formula dei seni:

$$\sin B = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{0.707107}{0.730406} = 0.968100$$

$$\sin A = \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{0.258819}{0.730406} = 0.354352$$

$$B = 75^{\circ}.489 \quad , \quad A = 20^{\circ}.754$$

Vediamo facilmente che l'eccesso sferico è pari a $\sigma = 6^{\circ}.24$,
cioè l'area è pari a: $\sigma\pi/180 = 0.109$ sr.

Area del triangolo sferico per 3 stelle - 4

Completiamo l'esercizio calcolando l'area del triangolo sferico per A, B e il polo.

In tal caso il lato **a** e il lato **b** divengono di 90° , come pure gli angoli A e B. L'angolo al polo è 15° , per cui l'area del triangolo sferico sta all'area della semi-volta celeste come $15/360 = 0.04$, e dunque l'area vale $0.04 \times 2\pi = 0.262$ sr. Da un altro punto di vista, se dividiamo la sfera in 24 fusi orari, ciascun fuso ha un'area di $4\pi/24 = 0.524$ sr, e dunque il triangolo dall'equatore verso il Polo ha metà di questo. Per differenza ricaviamo anche che l'area PAC vale:

$$0.262 - 0.109 = 0.153 \text{ sr.}$$

Lo si dimostri direttamente.

Distanza tra 2 località - 1

Calcolare, *nella approssimazione di Terra sferica e località al livello del mare*, la distanza sulla superficie terrestre (calcolata lungo un arco di cerchio massimo) tra Asiago e La Silla (Cile) .

Dati necessari per lo svolgimento dell'esercizio:

Longitudine e latitudine di Asiago: $\lambda_1 = 11^\circ 34' \text{ E}$ $\varphi_1 = + 45^\circ 51'$

Longitudine e latitudine di La Silla: $\lambda_2 = 70^\circ 24' \text{ W}$ $\varphi_2 = - 29^\circ 15'$

Raggio (medio) della sfera terrestre: $a_{\oplus} = \frac{1}{2}(6378.14+6356.75) = 6367.45 \text{ km}$

Per il calcolo della distanza voluta è possibile utilizzare la prima relazione del primo gruppo di Gauss. Riferendosi al triangolo sferico formato da Asiago, La Silla e il polo terrestre Nord :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

che nel nostro caso (attenti che Asiago a N e E, La Silla a S e W) è:

$$\cos d^\circ = \cos (90^\circ - \varphi_1) \cos (90^\circ - \varphi_2) + \sin (90^\circ - \varphi_1) \sin (90^\circ - \varphi_2) \cos (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Distanza tra 2 località - 2

o anche:

$$\cos d^\circ = \cos(44.15) \cos(119.25) + \sin(44.15) \sin(119.25) \cos(81.95) = -0.265$$

$$\text{da cui } d^\circ = 105^\circ.369, \quad d(\text{km}) = d^\circ \times 111.13 \text{ km}/^\circ = 11709.7 \text{ km}$$

essendo circa 111.13 km la distanza sulla superficie terrestre in approssimazione sferica e raggio medio di un angolo al centro di 1 grado (si noti che la definizione: 1 miglio nautico = arco di cerchio massimo che sottende un angolo al centro di 1' darebbe, usando il raggio medio, 1852.2 km, mentre per definizione del 1929 vale 1852 m).

Calcolare il punto nel quale il cerchio massimo Asiago - La Silla attraversa l'equatore

Si completi l'esercizio precedente calcolando in quale punto il cerchio massimo per Asiago e La Silla attraversa l'equatore

Consideriamo a tal fine il cerchio massimo passante il Polo Nord e il punto di attraversamento, diciamolo E, la cui latitudine è nulla, per cui nel triangolo sferico Asiago-Polo N- E, l'arco Polo N - E è di 90° .

Facciamo poi uso della relazione tra i seni di lati e di angoli, e della relazione:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

in cui nel nostro caso $c = 90^\circ$.

Dopo pochi calcoli troveremo che $\lambda_E = 44^\circ.5$ W.

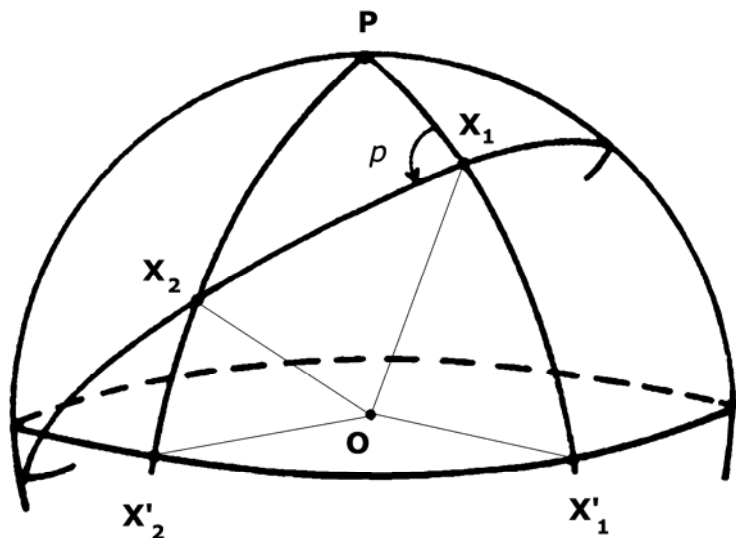
Distanza angolare e angolo di posizione - 1

Si consideri il triangolo sferico X_1PX_2 , in cui:

$$X_1P = 90 - \delta_1, \quad X_2P = 90 - \delta_2$$

La distanza angolare tra due corpi X_1 e X_2 sulla volta celeste è:

$$\cos X_1X_2 = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = |\alpha_1 - \alpha_2|$$



Si dice angolo di **posizione** p tra i due corpi l'angolo contato dal Nord verso Est, che è anche l'angolo al vertice X_1 del triangolo sferico X_1PX_2 .

Dunque:

$$\sin X_1X_2 \sin p = \cos \delta_2 \sin \Delta\alpha$$

$$\sin X_1X_2 \cos p = \cos \delta_1 \sin \delta_2 - \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta\alpha$$

Distanza angolare tra due stelle - 2

Non conviene usare la formula precedente quando la distanza tra le due stelle è troppo vicina a 0° , perché allora il coseno varia troppo lentamente; conviene piuttosto considerare un triangolo piano. Se le AR sono espresse in ore minuti e secondi di tempo allora converrà esprimere le differenze in AR e Dec rispettivamente in secondi di tempo e secondi d'arco e ottenere la distanza d in secondi d'arco dalla formula:

$$d = \sqrt{(15\Delta\alpha \times \cos \delta)^2 + (\Delta\delta)^2}$$

Come limite di validità si può porre un lato massimo sui 10' ($\cos d > 0.999995$).

Se proprio si vuole, si può anche porre:

$$\cos \delta = \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

Distanza angolare tra due stelle - 3

Un metodo alternativo valido per triangoli di qualunque dimensione fa ricorso alla (non molto usata) funzione trigonometrica "haverseno":

$$\text{hav } \vartheta = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \text{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}$$

avendosi allora:

$$\text{hav } d = \text{hav } \Delta \delta + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \text{hav } \Delta \alpha$$

che mantiene una eccellente precisione per qualunque arco. Questo secondo metodo consente di affrontare anche il caso in cui la distanza tra le due stelle tenda a 180° , dove pure la variazione del coseno è troppo lenta.

Calcolo distanza angolare tra due stelle - 1

Determinare la distanza angolare tra due stelle di coordinate equatoriali note, verificando il metodo nel seguente caso: $(\mathcal{O}_1, \underline{\alpha}_1) = (21^{\text{h}}30^{\text{m}}45^{\text{s}}.15, +40^{\circ}20'50''.2)$, $(\mathcal{O}_2, \underline{\alpha}_2) = (2^{\text{h}}10^{\text{m}}15^{\text{s}}.58, -42^{\circ}40'30''.7)$, e discutendo la precisione raggiungibile quando la distanza angolare tende a 0° o a 180° .

La distanza angolare d tra due astri di nota AR e Dec si trova dalla formula:

$$\cos d = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

e la stessa formula si può applicare per qualunque altro sistema di coordinate.

Mettiamo tutti i valori in gradi e decimali, mantenendo 8 cifre significative:

$$\alpha_1 = 322^{\circ}.6881251 \quad , \quad \delta_1 = 40^{\circ}.34727778 \quad , \quad \alpha_2 = 32^{\circ}.56491668 \quad , \quad \delta_2 = -42^{\circ}.67519444$$

Nel caso particolare si deve fare attenzione alla differenza di AR, dato che l'arco

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 15 \times (21^{\text{h}}.512542 - 2^{\text{h}}.166667) = 290^{\circ}.1232084$$

è maggiore di 180° ; il suo coseno vale: 0.34404006.

Calcolo distanza angolare tra due stelle - 2

Usiamo allora come AR della prima stella il valore:

$$\alpha_1 = - (360^\circ - 322^\circ.6881251) = -37^\circ.31187490$$

da cui il valore $\Delta\alpha = 69^\circ.87679158$, il cui coseno vale come prima 0.34404006. Quindi la formula automaticamente tiene conto di questa caratteristica; tuttavia è utile ricordare che nella definizione rigorosa di triangolo sferico intervengono sempre archi di lunghezza minore di 180° .

A questo punto abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos d &= 0.64741888 \times (-0.67784143) + 0.76213437 \times 0.73520813 \times 0.34404006 = \\ &= +0.24607227\end{aligned}$$

$$d = 104^\circ.2452106 = 104^\circ 14' 42''.758$$