

# Trasformazioni di coordinate

Questo Capitolo considera varie *regole per trasformare le coordinate da un sistema a un altro.*

Verranno illustrate due tecniche:

rotazione di matrici  
trigonometria sferica.

Vedremo anche come trasformare le *velocità angolari.*

E' utile ricordare che nella gran parte dei casi le trasformazioni saranno **rotazioni rigide** attorno all'origine. Talvolta occorrerà anche una traslazione da un'origine all'altra, ma non ne parleremo in questo capitolo.

Più avanti tuttavia incontreremo fenomeni che distorcono (beninteso, lievemente) l'aspetto della volta celeste, ad es. l'aberrazione, o la deflessione gravitazionale della luce.

# Trasformazioni mediante rotazione di matrici

Dati due riferimenti Cartesiani ortogonali  $(x, y, z)$  e  $(X, Y, Z)$  aventi la stessa origine  $O$ , per trasformare l'uno nell'altro si possono usare le seguenti relazioni

$$\begin{cases} X = x \cos xX + y \cos yY + z \cos zZ \\ Y = x \cos xY + y \cos yY + z \cos zY \\ Z = x \cos xZ + y \cos yZ + z \cos zZ \end{cases}$$

o anche, con notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix}$$

# Da cartesiane a polari

Dato il punto  $P(x, y, z) = P(X, Y, Z)$  a distanza  $r$  da  $O$ , si introduca il sistema polare  $(r, \lambda, \beta)$ , e il sistema ruotato (sempre per  $O$ )  $(R, \Lambda, B)$  ( si è detto che alcuni autori preferiscono usare il complemento di  $\beta$  come angolo polare):

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \lambda \\ y = r \cos \beta \sin \lambda \\ z = r \sin \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} X = r \cos B \cos \Lambda \\ Y = r \cos B \sin \Lambda \\ Z = r \sin B \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \cos B \cos \Lambda \\ \cos B \sin \Lambda \\ \sin B \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

dove la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  deve essere specificata di volta in volta.

Si noti la scomparsa *di ogni dipendenza da  $r$* , cosicché queste relazioni si applicano anche alla sfera unitaria.

La *trasformazione inversa* si ottiene scambiando il ruolo di  $(x, y, z)$  con  $(X, Y, Z)$ , facendo attenzione a mantenere il verso positivo degli angoli. Cio' implica che la matrice della rotazione inversa sia la trasposta di  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R}^{-1} = {}^T \mathbf{R} \quad , \quad \left( {}^T R_{ij} = R_{ji} \right) \quad ,$$

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) \quad , \quad (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)^{-1} = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{R}_i^{-1}$$

# Successione di rotazioni

In generale, una qualunque rotazione si può sempre supporre come risultato di tre diverse rotazioni successive,  $\mathbf{R}_1$  attorno all'asse x,  $\mathbf{R}_2$  attorno all'asse y,  $\mathbf{R}_3$  attorno all'asse z,  $\mathbf{R}=\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3$ , con:

$$\mathbf{R}_1(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ 0 & -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2(\phi_2) = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & -\sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3(\phi_3) = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & \sin \phi_3 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Da equatoriali a eclittiche - 1

Come primo esempio, consideriamo la trasformazione da equatoriale  $(\alpha, \delta)$  a eclittica  $(\lambda, \beta)$ , orientando gli assi  $x$  e  $X$  da  $O$  verso il punto  $\gamma$ , e dirigendo l'asse  $z$  verso il polo nord celeste  $P$ , e l'asse  $Z$  verso il polo eclittico Nord  $E$ .

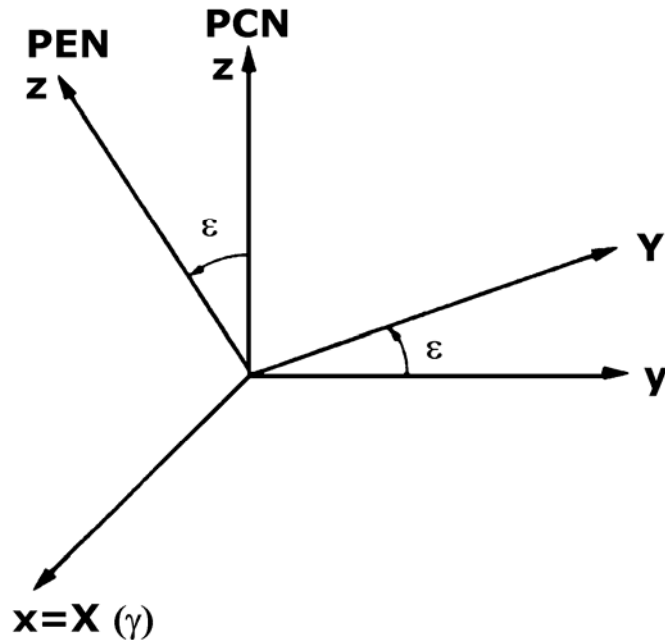
I valori degli angoli sono:

$$xX = 0 \quad , \quad xY = \frac{\pi}{2} \quad , \quad xZ = \frac{\pi}{2} \quad , \quad yY = \varepsilon \quad , \quad zZ = \varepsilon \quad , \quad zY = \frac{3}{2}\pi + \varepsilon \quad , \quad \text{etc.}$$

I due sistemi sono dunque connessi da una rotazione di  $\varepsilon \approx 23^\circ.5$  (l'obliquità dell'eclittica) attorno all'asse  $x$ ,  $\mathbf{R}_1(\varepsilon)$ , o inversamente di  $-\varepsilon$  attorno all'asse  $X$ :

$$\mathbf{R}_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9171 & 0.3987 \\ 0 & -0.3987 & 0.9171 \end{pmatrix}$$

# Da equatoriali a eclittiche - 2



$$\begin{cases} \cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \\ \sin \beta = -\cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon \end{cases}$$

e l'inversa è (attenzione ai segni):

$$\begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \\ \sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \end{cases}$$

Si noti che sono necessarie **tre** equazioni per determinare **due** angoli **e i** loro segni (quadranti).

Abbiamo anche già rilevato che ci vuole estrema cura nel fare i conti in prossimità dei poli.

# Da Alt-Az a orarie e equatoriali -1

Con la stessa tecnica possiamo trasformare le coordinate Alt-Az ( $A, h$ ) (con la nostra origine dal Sud; si faccia attenzione anche al fatto che vari autori usano la distanza zenitale  $z$  in luogo della altezza  $h$ ) in Angolo Orario e Declinazione ( $HA, \delta$ ), e poi dalla conoscenza del tempo siderale TS, in equatoriali ( $\alpha, \delta$ ).

In questo caso gli assi  $x$  e  $X$  punteranno entrambi verso W, l'asse  $y$  a S, l'asse  $z$  verso lo zenit Z, l'asse  $Y$  a M sull'equatore celeste e l'asse  $Z$  verso il polo celeste Nord.

Chiaramente *si deve conoscere la latitudine astronomica  $\phi$  del sito*.

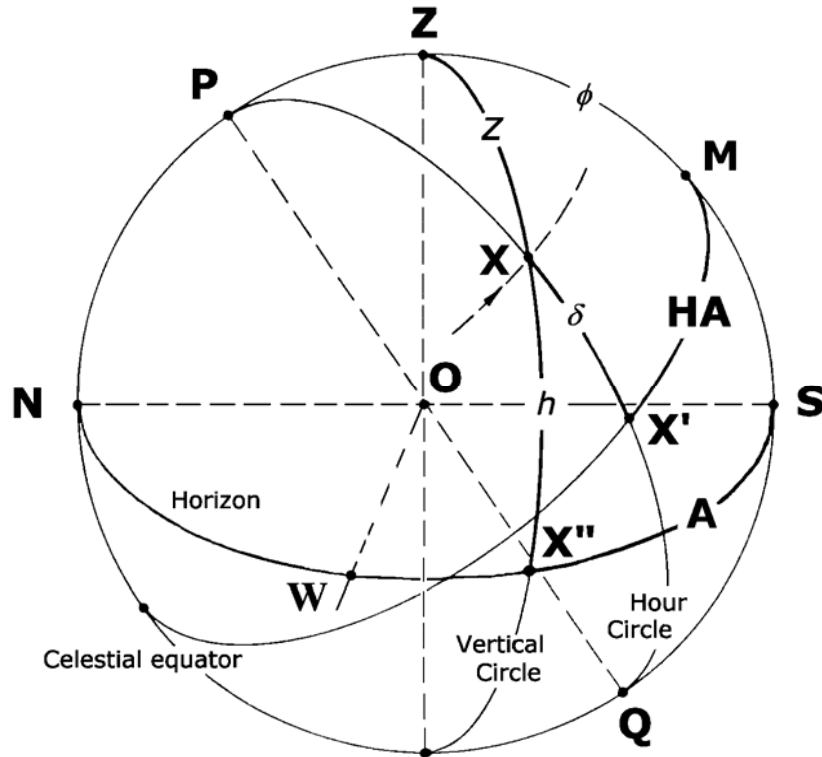
La matrice di rotazione sarà in tal caso:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}$$

Tuttavia, per convenzione il verso degli angoli cartesiani *è opposto* a quello di  $HA$  e  $A$ , entrambi crescenti in verso retrogrado, e dunque:

$$\begin{cases} \sin HA \cos \delta = \sin A \cos h \\ \cos HA \cos \delta = \cos A \cosh \sin \phi + \sin h \cos \phi \\ \sin \delta = -\cos A \cos h \cos \phi + \sin h \sin \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \cos h \sin A = \cos \delta \sin HA \\ \cos h \cos A = \cos \delta \cos HA \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \\ \sin h = \cos \delta \cos HA \cos \phi + \sin \delta \sin \phi \end{cases}$$

# Da Alt-Az a orarie e equatoriali -2



Supponiamo ora di conoscere le coordinate equatoriali  $(\alpha, \delta)$  della stella  $X$  e il tempo siderale  $ST$ , cosicché  $HA$  è anche immediatamente noto. Per puntare un telescopio avente montatura Alt-Azimutale, dobbiamo calcolare  $(A, h)$  dalle precedenti relazioni; la terza equazione ci dirà se la stella è visibile sopra all'orizzonte. Il limite di visibilità  $h = 0^\circ$  si raggiunge quando:

$$\cos HA = -\tan \delta \tan \phi$$

(relazione che dà l'angolo orario del sorgere e del tramontare). Allo stesso modo, l'Azimut del sorgere e del tramontare è dato da:

$$\cos A = -\sin \delta \sec \phi$$



# Da Alt-Az a orarie e equatoriali -3

Si trovano facilmente anche le due seguenti relazioni:

$$A = \arctan \frac{\sin HA \cos \delta}{\cos HA \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi}$$

$$h = \arcsin(\cos \delta \cos HA \cos \phi + \sin \delta \sin \phi)$$

la cui applicazione pratica esige la solita cautela sul quadrante di arrivo.

Come utile esercizio si applichino tali relazioni a stelle circumpolari, provando l'esistenza di una massima e una minima digressione dal meridiano.

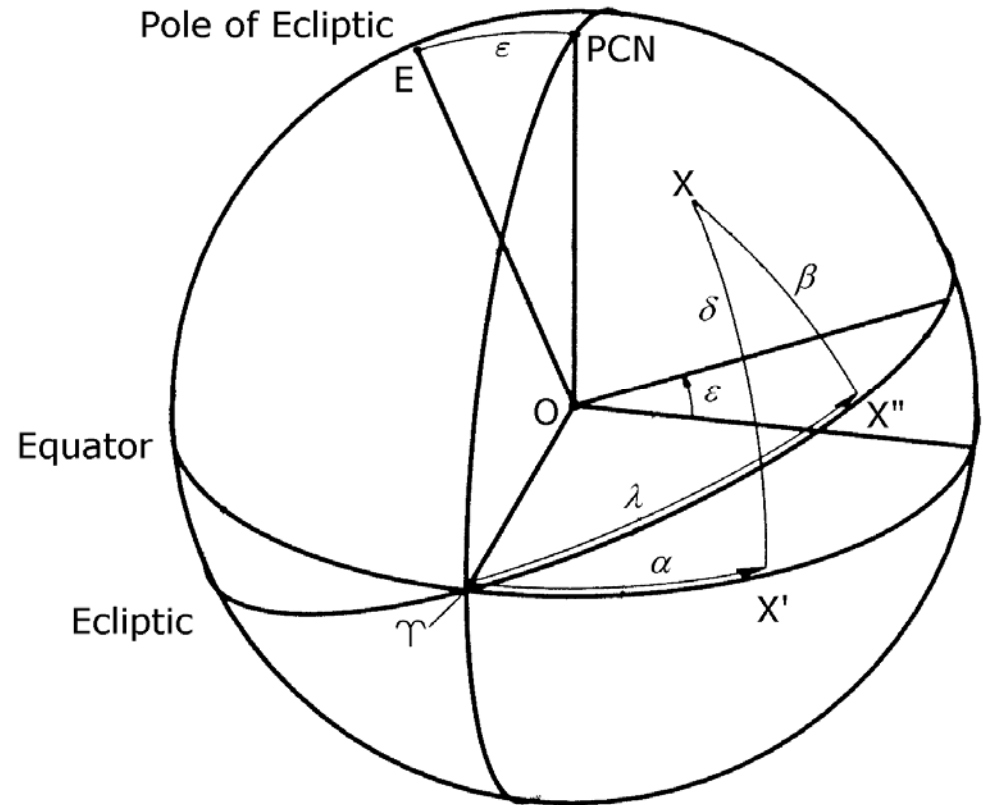
# Trasformazioni mediante la trigonometria sferica - 1

La ***trigonometria sferica***

è il secondo metodo di trasformazione.

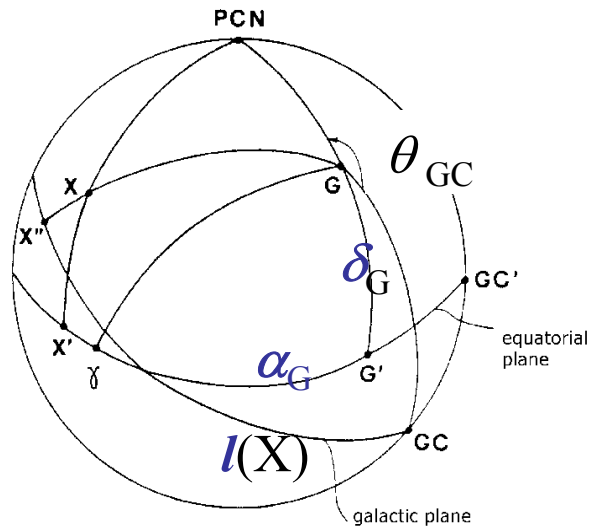
Ad esempio, la figura adiacente dà gli elementi necessari per effettuare la trasformazione tra coordinate equatoriali e eclittiche per mezzo dei gruppi di Gauss.

Troveremmo facilmente le stesse equazioni già viste prima, e le loro inverse.



# Trasformazioni mediante la trigonometria sferica - 2

Dato che la trasformazione da equatoriali a galattiche è più complicata, è meglio vederla in dettaglio. Sia P il polo celeste Nord, G il centro galattico e CG il piano galattico. Data la stella X, dai triangoli sferici otteniamo:



$$\begin{cases} \cos b \sin(\theta_{GC} - l) = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_G) \\ \cos b \cos(\theta_{GC} - l) = \cos \delta_G \sin \delta - \sin \delta_G \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_G) \\ \sin b = \sin \delta_G \sin \delta + \cos \delta_G \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_G) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_G) = \cos b \sin(\theta_{GC} - l) \\ \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_G) = \sin b \cos \delta_G - \cos b \sin \delta_G \cos(\theta_{GC} - l) \\ \sin \delta = \sin b \sin \delta_G + \cos b \sin \delta_G \cos(\theta_{GC} - l) \end{cases}$$

# Trasformazioni mediante la trigonometria sferica - 3

Se uno preferisse la tecnica della rotazione di matrici, ricordi le coordinate equatoriali dei 3 punti:  $\gamma$  (0,0),  $\mathbf{G}$  (192°.3, +27°.4),  $\mathbf{GC}$  (265°.6,-28°.9) (all'epoca B1950.0, secondo la definizione dell'IAU), e calcoli le distanze angolari:

$$\cos \gamma G = \cos xZ = -0.86760 \quad , \quad \gamma G = xZ = 150^\circ.2$$

$$\cos \gamma GC = \cos xX = -0.06690 \quad , \quad \gamma GC = xX = 93^\circ.9$$

$$\mathbf{R}_G = \begin{pmatrix} -0.06690 & +0.49273 & -0.86760 \\ -0.87276 & -0.45035 & -0.18838 \\ -0.48354 & +0.74459 & +0.46020 \end{pmatrix}$$

Si noti che le coordinate equatoriali della stella si devono precessare al B1950.0 prima della trasformazione. Benché non siano state definite formalmente dall'IAU, se teniamo conto che le coordinate galattiche non vengono mai usate in lavori di alta precisione astrometrica, possiamo assumere i seguenti valori all'epoca J2000:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} (192^\circ.84, +27^\circ.13) &= (12^{\text{h}}51^{\text{m}}, +27^\circ07'.7), \\ \mathbf{GC} (266^\circ.41, -28^\circ.94) &= (17^{\text{h}}45^{\text{m}}.6, -28^\circ56'.2) . \end{aligned}$$

# Da equatoriali a eclittiche per il Sole

Applichiamo le trasformazioni tra coordinate equatoriali e eclittiche al Sole assumendo che  $\beta_{\odot} = 0^{\circ}$  (che è approssimazione valida per gli scopi presenti):

$$\sin \alpha_{\odot} = \tan \delta_{\odot} / \tan \varepsilon$$

cosicché, con dovuta considerazione alla data (cioè al quadrante in cui si situa il Sole), **la misura di  $\delta_{\odot}$  dà ad ogni istante l'origine delle Ascensioni Rette, cioè del punto  $\gamma$ .**

Questa considerazione sottolinea il ruolo fondamentale giocato dal Sole (**e non dalle stelle!**) nel definire il Tempo Siderale.

Si faccia attenzione che dopo il solstizio d'estate, l'arco tra il Sole e  $\gamma$  **diventa maggiore di  $180^{\circ}$** , ma che comunque la formula rimane valida.

# Velocità Angolari - 1

E' utile derivare le *velocità angolari usando il Tempo Siderale come variabile*, e trascurando gli effetti della rifrazione atmosferica (oltre a altri termini molto più piccoli dovuti ai movimenti di equinozio e di polo di cui parleremo nel prossimo capitolo):

$$\frac{dHA}{dt} = 1 \quad , \quad \dot{\delta} = 0 \quad , \quad \dot{h} \cos h = -\cos \delta \sin HA \cos \phi$$

Da queste e dalle precedenti relazioni otteniamo:

$$\dot{h} = -\cos \phi \sin A \quad , \quad \dot{A} = \sin \phi + \cos A \tan h \cos \phi$$

La velocità in altezza è sempre ristretta tra  $\pm 1$  (cioè  $\pm 15^\circ$ /(ora siderale)), è nulla per un telescopio ai poli geografici, ed è massima per un telescopio all'equatore. Più complesso è il comportamento della velocità azimutale. All'orizzonte vale  $\sin \phi$ , e dunque è positiva nell'emisfero Nord e negativa in quello Sud, sia al sorgere che al tramonto (e ovviamente stazionaria sull'equatore terrestre). Ciò si può capire anche ricordando che abbiamo definito il verso apparente di rotazione della volta celeste rivolgendo le spalle al polo visibile.

# Velocità Angolari - 2

Consideriamo un telescopio con montatura Alt-az, e notiamo che il campo di vista è in continua rotazione con variabile velocità angolare, dato che la sfera celeste ruota attorno a una direzione che non coincide con quella degli assi meccanici. Per una data stella X, si chiami *angolo parallattico*  $q$  l'angolo:

$$q = Z\hat{P}X \quad , \quad q = Z\hat{P}X = \frac{\sin A \cos \phi}{\cos \delta}$$

La derivata temporale di  $q$  è:

$$\dot{q} = \frac{\cos \phi \cos A}{\cos \delta \cos q} \dot{A} = \frac{\cos \phi \cos A}{\cos h}$$

Nel caso particolare di una stella che transiti per lo Zenit ( $\delta = \phi$ ) la velocità azimutale diviene *infinitamente grande* quando la stella si avvicina al meridiano; per questa ragione un telescopio in montatura Alt-az ha una zona cieca attorno allo Zenit, dunque un cono la cui apertura si può rendere inferiore a  $1^\circ$  con una attenta scelta dei motori e dei controlli.

# Velocità Angolari - 3

Per una stella circumpolare, alla massima digressione la velocità è tutta in altezza; questo fatto può essere sfruttato per determinare con esattezza il meridiano e la latitudine del luogo.

La rotazione di campo si incontra anche nei telescopi in montatura equatoriale se parte della struttura è fissa rispetto al suolo, ad es. nel cosiddetto fuoco Coudé, in cui la luce è portata a un grande spettrografo sul pavimento dell'osservatorio.