

# La figura della Terra

Terra sferica, Longitudine e Latitudine terrestre  
La figura ellissoidica della Terra

# La Terra come figura matematica

Come si è detto, le dimensioni della Terra forniscono il primo '*metro*' per misurare le distanze astronomiche.

Nel seguito vedremo due modelli di riferimento per la forma della superficie terrestre:

la Terra come *sfera*

la Terra come *ellissoide*

Sono entrambi *modelli matematici*, il primo va bene se ci accontentiamo di una precisione di poche decine di km, il secondo se ci fermiamo alle centinaia di metri; la figura vera è ancora più complicata se la precisione delle misure diventa migliore di circa 100 m.

Oltre a dimensioni e forma sarà importante studiare *i movimenti della figura* nel riferimento inerziale (delle 'stelle fisse').

Completeremo poi quelle considerazioni rilevando che la rotazione diurna avviene attorno a un asse istantaneo che non coincide proprio con l'asse di figura.

# Latitudine e longitudine sulla *sfera* terrestre di *raggio* *unitario*

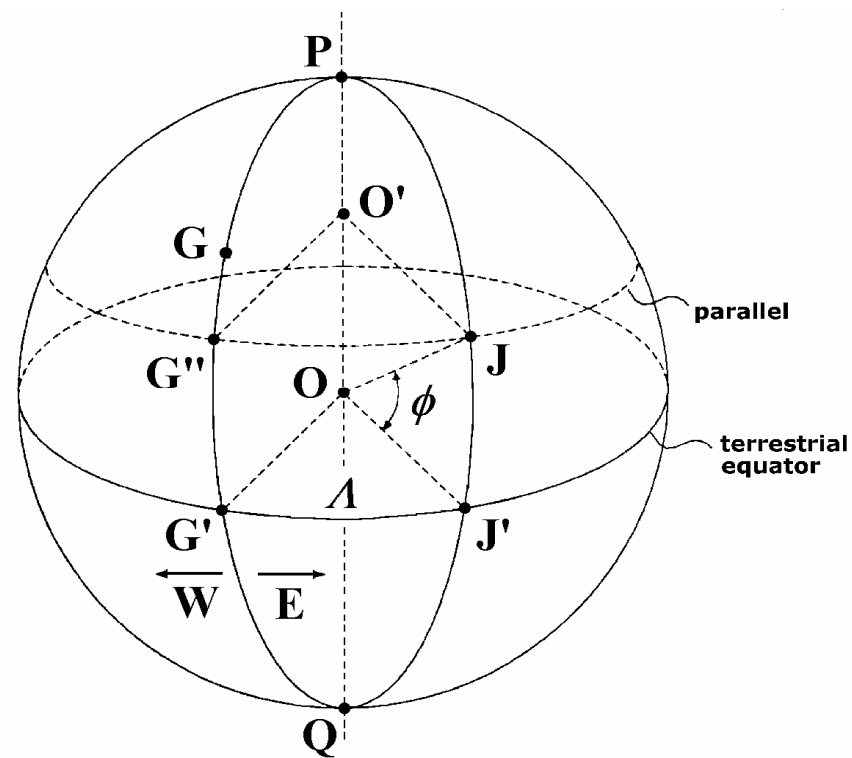
Sia PQ l'*asse di rotazione diurna*, la cui proiezione sulla volta celeste è facilmente identificabile, e che supponiamo di poter individuare anche sulla superficie terrestre come punti P,Q.

**L'equatore** è il cerchio massimo perpendicolare a PQ passante per O.

Consideriamo **J** = un qualunque punto sulla superficie, **G** = una origine arbitraria (es. Greenwich) e le loro proiezioni J', G' sull'equatore.

L'arco G'J' = angolo G'OJ' = angolo G''O'J sul cerchio minore parallelo è la **longitudine**  $\Lambda$  (E + o W -) di **J**.

L'arco J'J = angolo J'OJ è la **latitudine**  $\phi$  (N +, o S -) di **J**. Invece dell'arco JJ' si può usare il suo complemento arco PJ =  $90^\circ - \phi$  (detto **co-latitudine**).



# Geodesica sulla sfera

Si noti che c'è **un solo circolo massimo che colleghi due punti sulla sfera** (a meno che i punti non siano diametralmente opposti), ma **infiniti cerchi minori**; la distanza angolare tra i due punti è allora univocamente definita *solo* lungo il cerchio massimo, e si può dimostrare che *è anzi il percorso di lunghezza minima che li colleghi* (v. Esercizi).

Si usa dire allora che l'arco di cerchio massimo è la **geodesica** tra i due punti sulla sfera, così come la linea retta lo è per due punti nello spazio euclideo.

# Unità di misura per longitudine e latitudine

Tradizionalmente,  $\lambda$  è data in (<sup>h</sup> <sup>m</sup> <sup>s</sup>) a Est (E) o a Ovest (W) di Greenwich:

$$0^{\text{h}} \leq \lambda \leq 12^{\text{h}} \text{ E} \quad \text{oppure} \quad 0^{\text{h}} \leq \lambda \leq 12^{\text{h}} \text{ W}$$

mentre  $\phi$  è espressa in ( $^{\circ}$  ' ") Nord (N) o Sud (S) dell'equatore:

$$-90^{\circ} \leq \phi \leq +90^{\circ}.$$

Tuttavia, si deve stare attenti alle unità di  $\lambda$ , *che si può trovare espressa in unità circolari, crescenti verso Est oppure verso Ovest.* Nel testo di riferimento astronomico *The Astronomical Ephemerides*, a partire dal 1984, le longitudini a W di Greenwich sono negative, ad es. l'Osservatorio del Roque de los Muchachos (La Palma, Isole Canarie) ha  $\lambda \approx -17^{\circ}53'37.9$  (long W),  $\phi = +28^{\circ}45'28.3$  (lat N).

# Da angoli a unità lineari

E' chiaro che  $(\Lambda, \phi)$  sono distanze *angolari* sulla sfera unitaria; volendo distanze *lineari*, sappiamo che il raggio della Terra vale approssimativamente  $a_{\oplus} = 6380$  km, cosicché:

$$\text{arco } J'J = a_{\oplus} \phi \quad (\text{km, } \phi \text{ in radianti})$$

$$\text{arco } G''J = a_{\oplus} \Lambda \cos \phi \quad (\text{km, } \Lambda \text{ in radianti}),$$

danno rispettivamente la distanza tra l'equatore e **J** lungo il meridiano, e la distanza dal meridiano fondamentale a **J** lungo il parallelo di latitudine. Oltre al km, una comune unità di distanze lineari è il *miglio nautico*, cioè quell'arco che dovrebbe corrispondere sulla sfera a un angolo al centro di 1'. Secondo la definizione del 1929, 1 miglio nautico = 1852 m ( $\approx 1.15$  *statute mile*, che è invece il miglio usato nelle carte stradali anglosassoni). Data la figura non sferica della Terra, questo valore di 1852 m e' praticamente quello di 1' di latitudine a 45 gradi.

# Altri numeri utili

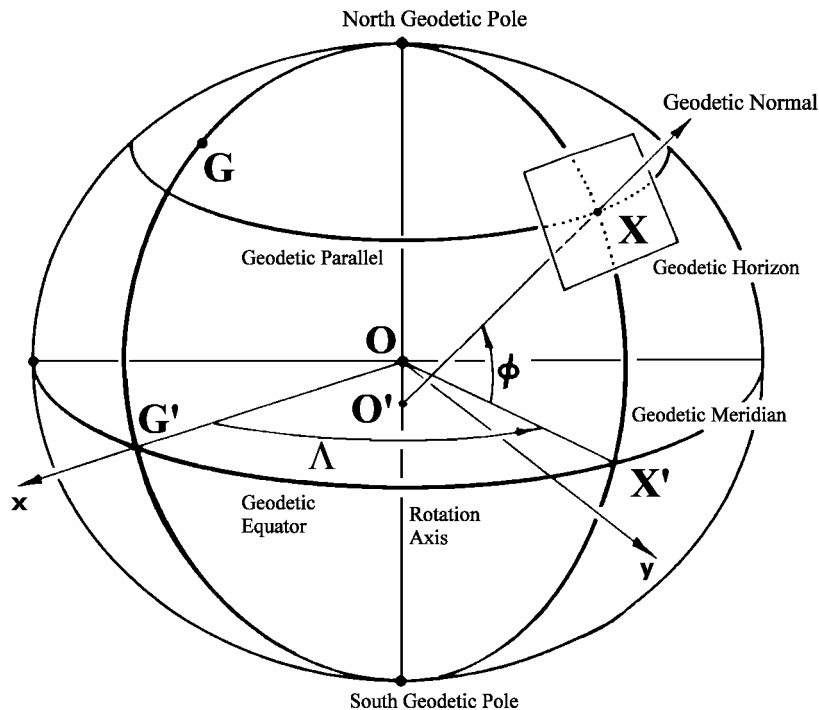
Altri numeri utili:

$1^\circ$  corrisponde a circa 111.13 km,

la circonferenza all'equatore è di circa 40.000 km.

In effetti, l'originale definizione del metro fu la 40-milionesima parte della lunghezza del *meridiano*, il che servì a collegare le misure del laboratorio terrestre a quelle degli astri mediante la parallasse diurna.

# La Terra come ellissoide - 1



Si consideri la Terra come **un ellissoide di rivoluzione** attorno all'asse polare  **$c$** , con semiassi maggiori  **$a = b > c$** . Si noti allora che la verticale per **P** (definita dunque come **perpendicolare al piano tangente**) non passa più per il centro della Terra **O**, ma intercetta l'asse di rotazione in **O'**, un po' sotto a **O**. Per ora possiamo confondere questa **normale geodetica** con la direzione del filo a piombo.

Nel modello **WGS84** si ha:

$$a_{\oplus} = 6378137.0 \quad \text{m}$$

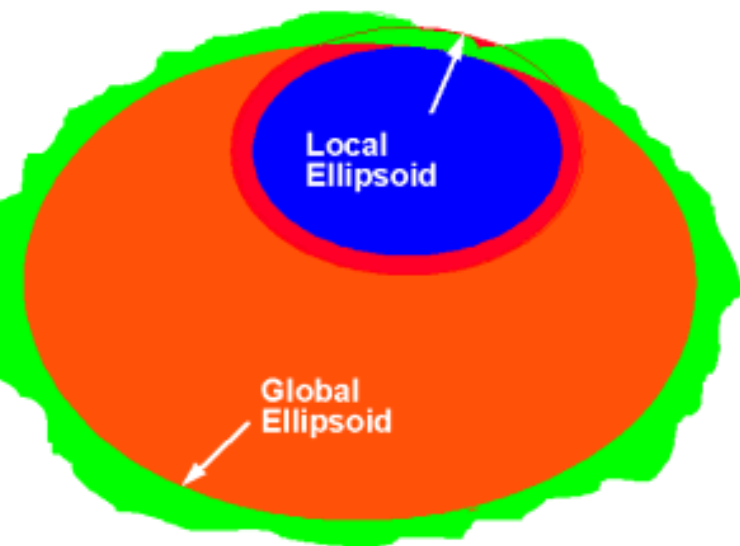
(asse equatoriale)

$$c = 6356752.3 \quad \text{m}$$

(asse polare)



# Il modello WGS84



Il WGS 84 è sia un sistema di riferimento globale fisso *con* la Terra, che anche un modello *della* Terra. E' definito da un insieme di parametri primari e secondari:

- i parametri primari definiscono la forma e la massa dell'ellissoide terrestre, la sua velocità angolare
- i parametri secondari definiscono un modello dettagliato del campo di gravità.

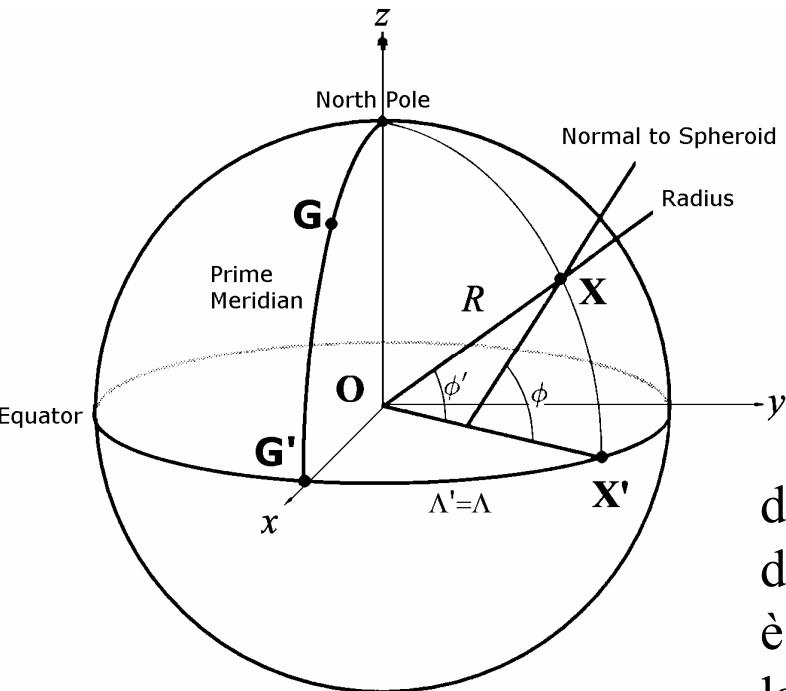
I parametri secondari sono necessari perché il WGS 84 è usato *non solo per definire le coordinate, ma anche le orbite di satelliti* quali quelli del GPS.

Per ragioni storiche, ciascuna nazione ha un suo proprio riferimento geodetico. I modelli regionali di solito non sono né uguali tra loro né uguali a quello globale WGS 84. Quindi uno dei problemi è di trasformare le coordinate regionali in quelle globali per mezzo di opportune trasformazioni.

Vedi: <http://www.wgs84.com/>

# La Terra come ellissoide - 2

Sia  $\mathbf{X}$  un punto sull'ellissoide distante  $R$  dal centro. Sia  $(x, y, z)$  è il riferimento equatoriale cartesiano in cui l'asse  $x$  è diretto verso la proiezione di Greenwich  $\mathbf{G}$ . Consideriamo l'ellisse passante per il polo e per  $\mathbf{X}$ , e diciamo  $(r, z)$  le coordinate di  $\mathbf{X}$  proiettate sull'asse maggiore e minore rispettivamente di tale ellisse. Si avrà:  $\mathbf{X}(r, z) = \mathbf{X}(x, y, z)$ , con  $R^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Dalla figura si ha anche:



$$r = R \cos \phi' \quad (0 \leq r \leq a_{\oplus})$$

$$z = R \sin \phi' \quad (0 \leq z \leq c)$$

$$\tan \phi' = \frac{z}{r}$$

dove  $\phi'$  è la **latitudine geocentrica**, che non dobbiamo confondere con quella **geodetica**  $\phi$ , che è l'angolo tra la direzione del semiasse maggiore e la normale alla tangente all'ellisse per  $\mathbf{X}$ .

# La terra come ellissoide - 3

Definiamo alcune quantità utili, cioè lo schiacciamento:

$$f = \frac{a_{\oplus} - c}{a_{\oplus}} \approx 0.0035 \approx \frac{1}{298} \quad (\text{schiacciamento, o flattening})$$

$$1 - f = \frac{c}{a_{\oplus}} \quad , \quad f_{\text{WGS84}} = 1 / 298.25722$$

$$\text{e l'ellitticità: } f_{\text{WGS}} e = \sqrt{\frac{a_{\oplus}^2 - c^2}{a_{\oplus}^2}} \approx 0.0818 \quad , \quad e^2 = \frac{a_{\oplus}^2 - c^2}{a_{\oplus}^2} ,$$

Da cui:

$$e^2_{\text{WGS84}} = 0.00669438$$

$$e^2 = f(2 - f) \quad , \quad (1 - f)^2 = 1 - e^2 \quad , \quad c^2 = a_{\oplus}^2 (1 - e^2) = a_{\oplus}^2 (1 - f)^2$$

# Equazione dell'ellissi

Usando tali quantità ausiliarie, l'equazione dell'ellisse passante per **X** e per il polo si può scrivere in vari modi equivalenti:

$$\left(\frac{r}{a_{\oplus}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$(1-f)^2 r^2 + z^2 = a_{\oplus}^2 (1-f)^2$$

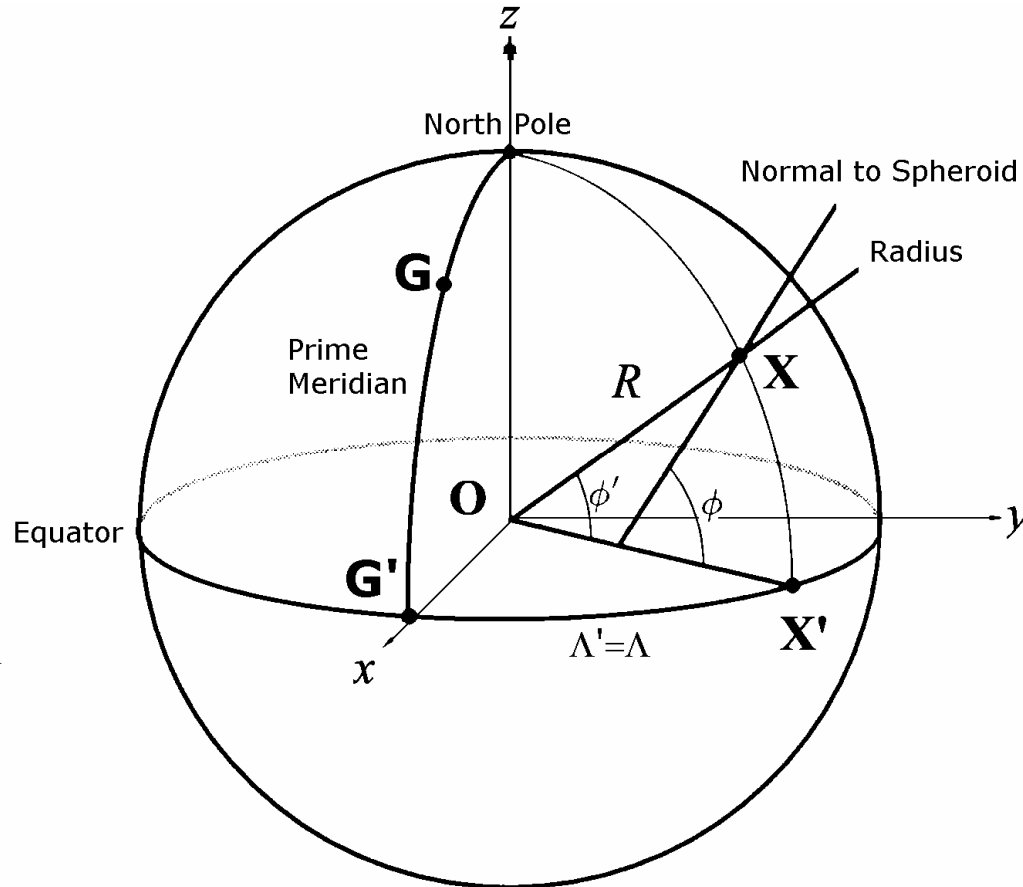
$$(1-e^2) r^2 + z^2 = a_{\oplus}^2 (1-e^2)$$

Spesso si usa una quantità a-dimensionale  $\rho$  tale che:

$$R = a_{\oplus} \rho \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

# La Terra come ellissoide - 4

Definiamo ora meglio la latitudine **geodetica**  $\phi$ , come angolo tra la direzione del semiasse maggiore e la normale alla tangente all'ellisse per



# La Terra come ellissoide - 5

Il coefficiente angolare  $m$  della tangente è dato da:  $m = -\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{c}{a_{\oplus}} \right)^2 \frac{r}{z}$

Il coefficiente  $m'$  della normale si trova subito da  $mm' = -1$ , cosicché:

$$m' = \tan \phi = m \left( \frac{a_{\oplus}}{c} \right)^2 \frac{z}{r}, \quad \tan(\phi' - \phi) = \frac{\tan \phi' - \tan \phi}{1 + \tan \phi' \tan \phi} = \frac{q \sin 2\phi}{1 - q \cos 2\phi}$$

$$\text{in cui } q = -\frac{e^2}{2 - e^2}$$

$$\phi' - \phi = -\left(f + \frac{1}{2}f^2\right) \sin 2\phi + \frac{1}{2}f^2(1 + f) \sin 4\phi + L \approx -692''.74 \sin 2\phi + 1''.16 \sin 4\phi$$

$$R = a_{\oplus} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}f + \frac{5}{16}f^2 \right) + \frac{1}{2}f \cos 2\phi - \frac{5}{16}f^2 \cos 4\phi + L \right] \approx 6367.47 + 10.69 \cos 2\phi - 0.02 \cos 4\phi$$

# La Terra come ellissoide - 5

Possiamo esprimere il raggio di curvatura  $k$  in  $X(r, z)$  (nelle stesse unità del raggio equatoriale, ad es. in km) :

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{\tan \phi} \quad , \quad \frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{d \tan \phi}{dr} \frac{1}{\tan^2 \phi}$$

$$k = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2 z}{dr^2}\right|} = a_{\oplus} \frac{1 - e^2}{\left(1 - e^2 \sin^2 \phi\right)^{3/2}}$$

Dunque, la lunghezza  $K$  (in km) dell'arco di meridiano passante per  $X$  è:

$$K = 2\pi \frac{k}{360} = a_{\oplus} \frac{\pi}{180} \frac{1 - e^2}{\left(1 - e^2 \sin^2 \phi\right)^{3/2}}$$

# La Terra come ellissoide - 6

Misurando  $K$  in diversi luoghi lungo il meridiano (idealmente da polo a polo) si può trovare la curvatura complessiva della superficie, e dal confronto con i diversi valori si trova il raggio equatoriale, quello polare, la eccentricità e l'appiattimento. All'equatore,  $K \approx 110.6$  km, al polo  $K \approx 111.7$  km.

Si noti che non c'è bisogno di una terza dimensione per determinare il raggio di curvature della superficie. Ovviamente, le osservazioni della Terra dallo spazio esterno sono di fondamentale importanza per determinare la superficie reale con precisione miglior del metro.



# Da coordinate sferiche a cartesiane

In generale, un punto  $P$  non sarà proprio sopra alla superficie matematica. Invece di darle le coordinate  $(\lambda, \phi)$  e la quota  $H$  si potranno dare le **coordinate cartesiane equatoriali**, dirigendo l'asse  $x$  verso  $G'$  (proiezione di Greenwich sull'equatore lungo il meridiano), l'asse  $y$  a  $90^\circ$  in senso **diretto** (anti-orario) sul piano equatoriale, e l'asse  $z$  verso il polo terrestre Nord.

Per quanto matematicamente conveniente tuttavia, si noterà che il centro della Terra, cioè l'origine del sistema di riferimento, **non è direttamente accessibile**.

Usando coordinate cartesiane si dovrà anche stare attenti a passare correttamente da distanze cartesiane a distanze sulla superficie.

# Punto sopra alla superficie - 1

Consideriamo dunque un punto P ad una altezza  $H$  (misurata lungo la verticale geodetica) sopra la superficie della Terra, ad es. la cima di una montagna (o con le opportune modifiche la posizione istantanea di un aereo o un satellite in orbita bassa come la Stazione Spaziale o anche l'Hubble Space Telescope, che orbita a circa  $H = 550$  km). Dato che:

$$dr = H \cos \phi \quad , \quad dz = H \sin \phi$$

avremo anche:

$$dR = H \cos(\phi - \phi') \quad , \quad d\phi' = \frac{H}{R} \sin(\phi - \phi')$$

Dalle coordinate geodetiche potremo derivare le coordinate cartesiane geocentriche  $(x, y, z)$  prendendo in considerazione  $H$  e la correzione  $(\phi' - \phi)$ .

# Punto sopra alla superficie - 2

Le coordinate cartesiane si possono calcolare con le formule:

$$\begin{cases} x = a_{\oplus} \rho \cos \phi' \cos \lambda = (a_{\oplus} C + H) \cos \phi \cos \lambda \\ y = a_{\oplus} \rho \cos \phi' \sin \lambda = (a_{\oplus} C + H) \cos \phi \sin \lambda \\ z = a_{\oplus} \rho \sin \phi' = (a_{\oplus} S + H) \sin \phi \end{cases}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \phi + (1-f)^2 \sin^2 \phi}} \quad S = (1-f)^2 C$$

Le trasformazioni inverse di solito richiedono approssimazioni successive.

Si faccia attenzione che la quota geodetica  $H$  di solito **non** coincide con l'altezza sul livello del mare, perché l'ellissoide matematico tende a passare 40 o 50 m **sotto** la superficie degli oceani.

# Esempi: il 182 cm e il TNG

telescopio	182 cm Copernico	352 cm Galileo (TNG)
	<i>Cartesiane geocentriche</i>	<i>Cartesiane geocentriche</i>
$X$	+ 4360893.8	+ 5327423.3
$Y$	+ 892690.4	- 1719592.5
$Z$	+ 4554619.0	+ 3051176.2
	<i>Geodetiche</i>	<i>Geodetiche</i>
$\lambda$	(E) + 11°34'07".92	(W) - 17°53'20".6
$\phi$	+ 45°50'54".92	+ 28°45'14".4
$H$ (m)	1435 (1380 s.l.m.)	2427.6 (2370 s.l.m.)
	<i>Astronomiche</i>	<i>Astronomiche</i>
$\lambda$	+11°34'22".14 $\pm$ 0".45	-17°53'37".9 $\pm$ 0".45
$\phi$	+45°50'36".99 $\pm$ 0".41	+28°45'28".3 $\pm$ 0".60

# Estensione della cartografia al Sole e ai pianeti interni

L'Astronomia **dal suolo e dallo Spazio** ha esteso la **cartografia**, cioè un sistema di coordinate che dia la posizione del polo Nord e del primo meridiano dell'oggetto in un riferimento inerziale  $(\alpha_0, \delta_0, W)$ , a tutti i corpi maggiori del Sistema Solare. Di solito i valori di  $(\alpha_0, \delta_0, W)$  sono dati con 2 cifre decimali.

Per quanto riguarda la conoscenza delle superficie del sistema solare interno:

**Sole** (da Terra, e da varie sonde tra cui la SoHO, ancora nessuna immagine dei poli)

**Luna** (circa il 59% della sua superficie essendo visibile dalla Terra, il 100% solo da sonde orbitanti attorno ad essa, ce ne sono varie)

**Mercurio** (molto difficile da osservare da Terra, perché molto vicino angolarmente al Sole, si hanno immagini a buona risoluzione solo per il 50% della superficie, grazie al Mariner 10, si spera nelle sonde Messenger, in volo, e BepiColombo, lancio verso il 2014)

**Venere** (difficilissimo osservare la superficie a causa delle spesse nubi. Solo il *radar* della sonda Magellan ha dato immagini dettagliate nel 1994).

# Estensione della cartografia ai pianeti esterni

**Marte** (storia interessantissima, Schiaparelli, Lowell, etc. ...), oggi tanti spacecraft forniscono immagini dettagliatissime. Ci sono anche due rover in movimento sul suolo

Le sonde Voyagers sono state **fondamentali** per estendere la cartografia al Sistema Solare esterno, da Giove fino a Nettuno. Ai loro dati vanno aggiunti quelli dell'Hubble Space Telescope HST e delle altre sonde qui citate:

**Giove** (sistemi di riferimento collegati sia a *dettagli atmosferici* che *al campo magnetico*, Galileo, Cassini, New Horizon),

**Saturno** (sistemi di riferimento come per Giove, Cassini),

**Urano e Nettuno** (Voyagers, HST),

**Plutone + Caronte** (HST, New Horizon che ora è in viaggio e raggiungerà anche la fascia esterna detta Kuiper Belt nel 2015)

Per i sistemi di coordinate usati in applicazioni spaziali si veda in:

<http://sspg1.bnsc.rl.ac.uk/Share/Coordinates/systems.htm> (Mike Hapgood)

<http://www.space-plasma.qmw.ac.uk/heliocoords/systems2art/node1.html> (M. Franz)