

# Elementi di Trigonometria Piana e Sferica

Elementi di trigonometria piana

Alcuni sviluppi in serie

Un'equazione trascendente

La serie binomiale

I triangoli piani

Elementi di trigonometria sferica

Coordinate polari sferiche e cartesiane

Vettori

# Elementi di trigonometria piana

1 radiante  $\approx 57^\circ.2957795 \approx 3437'.74677 \approx 206264''.806$  (=  $R''$ )

$1'' \approx 0.000004848$  radianti,

$1' \approx 0.000290888$  radianti,

$1^\circ \approx 0.017453292$  radianti

angolo  $\theta$  (rad) =  $\theta''/206264.806 = \theta''/R''$ ,  $\theta'' = 206264.806 \cdot \theta$  (rad) =  $R''\theta$

$$(\theta'')^n = (\theta'') \left( \frac{(\theta'')}{206264.8} \right)^{n-1} = (\theta'') \theta^{n-1}$$

La motivazione per utilizzare sia unità teoriche che unità pratiche è la seguente: per definizione, il radiante è l'arco uguale al raggio, ed è l'unità da usarsi nelle formule teoriche.

Tuttavia, la circonferenza non è un multiplo razionale dell'arco e per eseguire misure con cerchi graduati, o con encoders digitali, ci vorranno sempre unità razionali, per cui conviene suddividere il cerchio in  $360^\circ$  di  $60'$  di  $60''$  ciascuno.

# Ore, minuti e secondi come *angoli*

Si faccia attenzione all'uso astronomico (ma anche geografico) di utilizzare unità di angolo che hanno lo stesso *nome* di unità di tempo:

$$24^{\text{h}} = 360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}, \quad 1^{\text{h}} = 15^{\circ} \approx 0.26179935 \text{ radianti}$$

$$4^{\text{m}} = 1^{\circ} \approx 0.017453292 \text{ radianti},$$

$$1^{\text{s}} = 15'' \approx 0.000072722 \text{ radianti}$$

È solo grazie alla (quasi) regolare rotazione della Terra che gli angoli dei corpi celesti rispetto al meridiano possono essere usati anche per misurare il passare del tempo,

*ma i due concetti non devono essere confusi!*

# Alcune formule trigonometriche

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

(da cui seguono in particolare le formule di duplicazione e quelle di bisezione, che si lasciano per esercizio)

# Alcuni sviluppi in serie

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - L + (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + L \quad (\forall \theta's)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - L + (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + L \quad (\forall \theta's)$$

$$\tan \theta = \frac{1}{i} \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + L + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_{2n} \theta^{2n+1}}{(2n)!} + L \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

$$e^{\sin \theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{6}\theta^4 + L$$

(dove i  $B_{2n}$  sono i numeri di Bernoulli e  $i$  è l'unità immaginaria)

# Sviluppi inversi

Qualunque serie convergente del tipo:

$$\theta = \varphi + a\varphi^2 + b\varphi^3 + c\varphi^4 + d\varphi^5 + \Lambda$$

si può invertire come:

$$\varphi = \theta - \alpha\theta^2 - \beta\theta^3 - \gamma\theta^4 - \delta\theta^5 - \text{L}$$

dove:

$$a = \alpha$$

$$\beta = b - 2a^2$$

$$\gamma = c + 5a^3 - 5ab$$

$$\delta = d - 14a^2 - 3b^2 + 18a^2b - 4ac$$

# Sviluppi inversi di sin e tan

$$\theta = \sin \theta + \frac{1}{6} \sin^3 \theta + \frac{3}{40} \sin^5 \theta + \frac{5}{112} \sin^7 \theta + \Lambda$$

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \frac{1}{7} \tan^7 \theta + \Lambda$$

Da queste formula, vediamo che le differenze prime tra le funzioni  $\sin \theta$ ,  $\tan \theta$  e l'arco  $\theta$ , sono quantità del **terzo** grado (e segno opposto), mentre la funzione  $\cos \theta$  differisce da 1 per un termine del **secondo** grado.

Dunque, quando gli angoli sono molto piccoli, è legittimo confondere l'arco  $\theta$  con  $\sin \theta$  oppure con  $\tan \theta$ , e con minor precisione porre  $\cos \theta = 1$ .

Quando poi approssimiamo l'arco  $\theta$  con  $\sin \theta$  (oppure con  $\tan \theta$ ), la funzione restituisce il valore dell'arco **in radianti**. Per ottenere secondi d'arco, dobbiamo moltiplicare il valore in radianti per  $R'' = 206264''.8$ .

Ad es., se  $\sin \theta = 0.00141$ , allora  $\theta \approx 0.00141 \times 206264''.8 = 290''.83$ .

# Lo sviluppo in serie binomiale

Dato un numero reale qualunque  $m$ , si ha:

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + L = \\ &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + L = \sum_0^{\infty} \binom{m}{n} x^n \quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

in cui si è usata la notazione abbreviata:  $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} = \frac{m(m-1)L(m-k+1)}{k!}$

e in cui:  $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

In particolare:  $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + L$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + L$$



# Un'importante equazione trascendente

Mediante le espressioni complesse delle funzioni trigonometriche, possiamo risolvere l'importante equazione trascendente:

$$\tan x = m \tan y \quad (m > 0)$$

Poniamo: 
$$\frac{1-m}{1+m} = q \quad (|q| < 1)$$

Lagrange, usando le espressioni complesse delle funzioni trigonometriche, dimostrò che :

$$x = y - q \sin 2y + \frac{q^2}{2} \sin 4y - \frac{q^3}{3} \sin 6y + \frac{q^4}{4} \sin 8y + \Lambda$$

# Esempi pratici - 1

Esempio: si voglia determinare il massimo valore di  $\theta$  per cui:

$$\tan \theta - \theta \leq 1''$$

Si scriva:

$$\tan \theta - \theta \approx \frac{\theta^3}{3} \leq \frac{1}{206264.8}$$

$$\theta \leq \sqrt[3]{3 / 206264.8} \approx 0.02441 \quad \theta'' = R'' \theta \leq 5034''.9 \approx 1^\circ 24'$$

Oppure, se il limite delle misure o dei calcoli fosse  $0''.01$ , sarà lecito porre  $\theta'' = R'' \sin \theta$  nella condizione (valida per la tangente e *a fortiori* per il seno):

$$\frac{\theta'' \theta^2}{3} < 0''.01 \quad \frac{(\theta'')^3}{3} < 0''.01 (R'')^2 \quad \theta'' < 1000''$$

# Esempi pratici - 2

Un altro esempio importante è il calcolo di uno *sviluppo in serie di Taylor* usando piccoli incrementi finiti:

$$\Delta f(\theta) = + \frac{df}{d\theta} \Delta\theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \Delta^2\theta + L$$

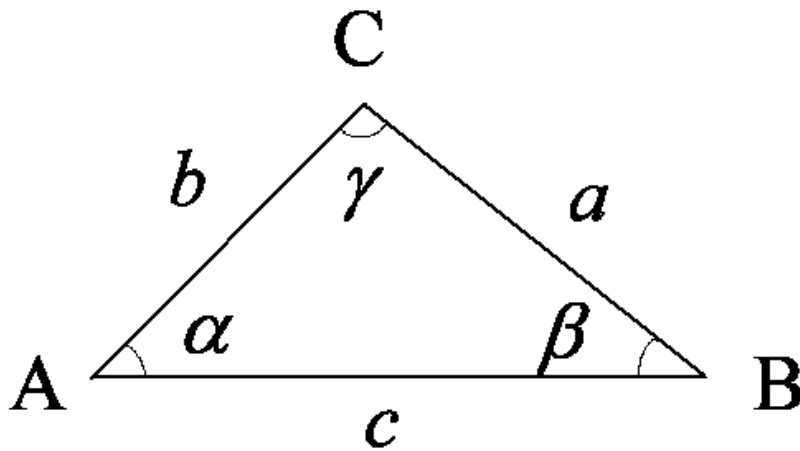
Si supponga di usare come minimo incremento il valore  $\Delta\theta = 50'' = 0.00024$  rad. Il quadrato dell'incremento è  $\Delta^2\theta = 0.00024 \times 50'' = 0''.012$  (nota, arcsec, *non* arcsec quadrati!).

Tenendo in considerazione l'ampiezza delle derivate, vediamo che se ci arrestiamo al primo termine otteniamo la funzione con una precisione di pochi centesimi di secondo d'arco; se ci bastasse una precisione di pochi decimi di arcsec, allora potremmo aumentare l'incremento a  $150''$ , e così via. Queste considerazioni sono importanti *quando si derivano i valori degli angoli dagli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche*. Per esempio, vicino a  $0^\circ$ , l'errore sull'angolo  $\theta$  può essere molto maggiore dell'errore sul  $\cos\theta$ , mentre vicino a  $90^\circ$ , l'errore sull'angolo  $\theta$  può essere molto maggiore dell'errore sul  $\sin\theta$ .

# I triangoli piani - 1

Consideriamo ora un triangolo piano, avente vertici **A**, **B**, **C**, lati ***a***, ***b***, ***c*** (perimetro  $2s = a+b+c$ ) e angoli opposti ai lati ***α***, ***β***, ***γ***.

E' ben noto che :



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Cioè la conoscenza di due angoli è sufficiente per determinare il terzo.

*In generale la conoscenza di 3 elementi è sufficiente per trovare gli altri 3, con la notevole eccezione:*

***dati i 3 angoli, i 3 lati non sono univocamente determinati***  
(mentre, dati i 3 lati, i 3 angoli sono univocamente determinati).

# I triangoli piani - 2

Utili relazioni sono:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R} \quad (\text{Legge dei seni, in cui } \mathbf{R} \text{ è il raggio del cerchio circoscritto})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{Legge del coseno})$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}} \quad (\text{legge delle tangenti})$$

# I triangoli piani - 3

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{r}{s-a}$$

(note come formule di Brigg), in cui:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \text{è il raggio del cerchio inscritto}$$

$$K = sr = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma} = \frac{abc}{2R} \quad \text{è l'area.}$$

# I triangoli piani - 4

Altre utili relazioni sono:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma + 1$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta + \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \gamma + \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma = 1$$

# Una applicazione dello sviluppo in serie binomiale al triangolo piano

Riprendiamo la formula del coseno:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

che scriviamo come: 
$$a^2 = c^2 \left[ 1 + \frac{b^2 - 2bc \cos \alpha}{c^2} \right]$$

Supponiamo che sia  $b/c \ll 1$  per cui possiamo trascurare  $(b/c)^2$ .

Poniamo allora  $b \cdot \cos \alpha = x$ . Siccome sia  $a$  che  $c$  sono quantità positive avremo, dallo sviluppo in serie binomiale:

$$\frac{1}{a} \approx \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x}{c}}} = \frac{1}{c} \left[ 1 + \frac{x}{c} + \frac{(3x^2 - b^2)}{2c^2} + \frac{(5x^3 - 3xb^2)}{2c^3} + L \right]$$

che useremo varie volte nel seguito.



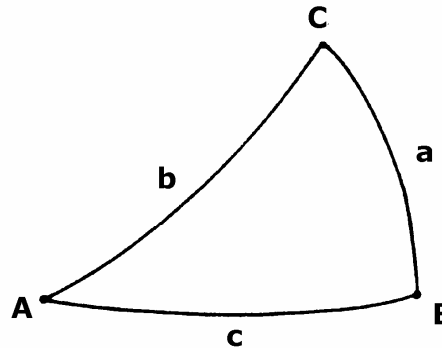
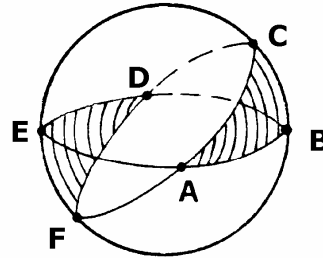
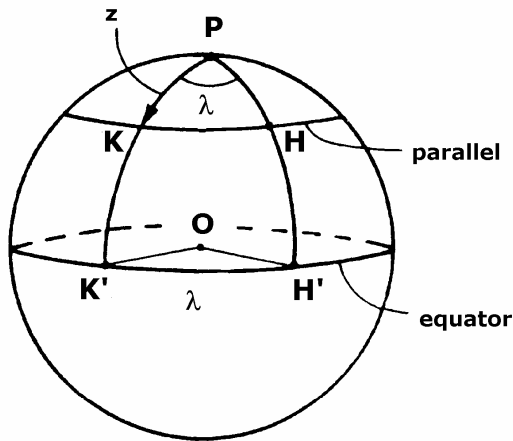
# Elementi di trigonometria sferica

La trigonometria sferica trova le sue origini nel mondo greco, con Ipparco di Nicea (circa 180 B.C.), and poi con Claudio Tolomeo (II secolo D.C.). Nel XIX secolo, Carl F. Gauss mise in forma sistematica le relazioni che verranno qui usate.

- La sfera è il luogo, nello spazio 3D cartesiano, dei punti che hanno la stessa distanza  $R$  da un dato centro  $O$ .
- La sua superficie è dunque finita ma illimitata.
- Ogni piano passante per il centro definisce sulla sfera un cerchio massimo di raggio  $R$ ; consideriamo uno di questi come **piano equatoriale**. La retta passante per  $O$  e perpendicolare al piano equatoriale definisce sulla sfera due punti che sono i **poli** del cerchio massimo.
- Poniamo ora  $R = 1$ , in modo che l'area sulla superficie si possa esprimere in **steradiani, o in unità pratiche gradi quadrati**.
- L'area di tutta la sfera è allora:

$$4\pi \text{ sr} = 4\pi (360/2\pi)^2 = 129600/\pi \approx 41252.96125 \text{ gradi quadrati}$$

# I triangoli sferici -1

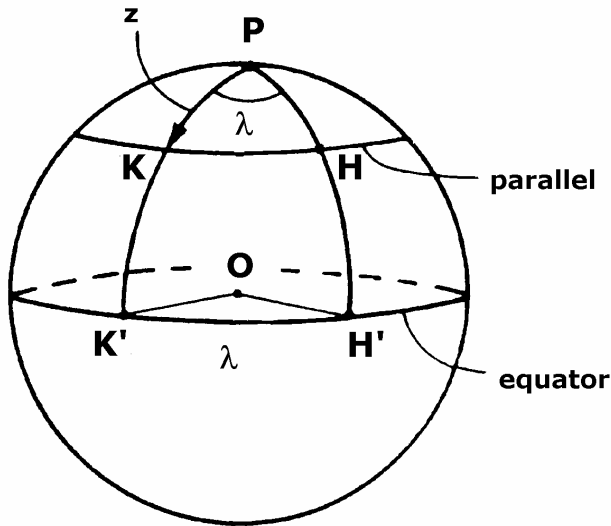


Tre cerchi massimi dividono la sfera in 8 porzioni: chiameremo **triangolo sferico** quella parte i cui lati sono tutti minori di  $\pi$ , cioè quella parte contenuta tutta in un emisfero (N:B: tra 0 e  $\pi$ , l'arccos è a valore singolo, l'arcsin no!) .

Si usa indicare i vertici con le lettere maiuscole A,B,C, e i lati con le lettere minuscole ***a, b, c*** corrispondenti al vertice opposto.

L'angolo nel vertice A o B o C si indica con la stessa lettera del vertice, ***ma in corsivo, A, B, C.***

# I triangoli sferici -2



1. Sulla sfera di raggio unitario, l'arco di cerchio massimo K'H' ha lunghezza  $\lambda$  pari all'angolo al centro K'OH' oppure all'angolo al polo KPH = K'PH'.
2. Il triangolo sferico è fatto dunque di 3 **archi massimi**; ad es. HK **non** è lato di un triangolo sferico, e anzi *la distanza tra H e K misurata sul parallelo è sempre maggiore di quella misurata sul cerchio massimo*.
3. Un triangolo sferico può avere tutti e tre gli angoli retti;
4. In generale:  $0 < a + b + c < 2\pi$ ,  $\pi < A + B + C < 3\pi$

# Geodesica sulla sfera

Si noti che c'è **un solo circolo massimo che colleghi due punti sulla sfera** (a meno che i punti non siano diametralmente opposti), ma **infiniti cerchi minori**;

la distanza angolare tra i due punti è allora univocamente definita **solo** lungo il cerchio massimo, e si può dimostrare che ***è anzi il percorso di lunghezza minima che li colleghi.***

Si usa dire allora che l'arco di cerchio massimo è la **geodesica** tra i due punti sulla sfera, così come la linea retta lo è per due punti nello spazio euclideo.

# Relazioni di Gauss

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{legge dei coseni})$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (\text{legge dei seni})$$

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

e simili permutando le lettere. **Dunque, in un triangolo sferico, i 3 lati sono determinati univocamente dai 3 angoli, una proprietà non presente nei triangoli piani.** Un altro modo di esprimere lo stesso concetto: non c'è bisogno di uscire dalla superficie della Terra per misurarne la curvatura (e con le opportune modifiche, dall'Universo).

# Eccesso sferico e area del triangolo

In un triangolo sferico, si dice *eccesso sferico* la quantità:

$$\sigma = A + B + C - \pi$$

In un generico triangolo sferico si ha la relazione:

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left( A - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left( B - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( C - \frac{\sigma}{2} \right)}} \quad \text{e simili per } b \text{ and } c.$$

L'area del triangolo sulla sfera di raggio unitario vale proprio  $\sigma$  sr, e quella sulla sfera di raggio  $R$  vale:

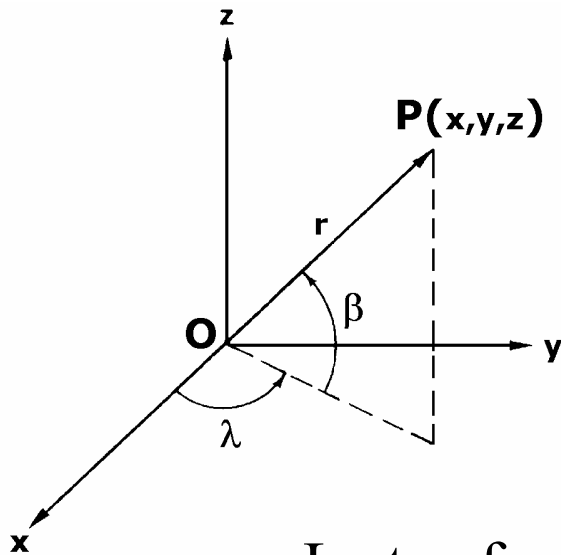
$$K = R^2 (A + B + C - \pi) \quad \text{nelle stesse unità di } R^2.$$

# Triangoli sferici quasi-piani

Intuitivamente, quando i **lati** del triangolo sferico sono molto piccoli in confronto con il raggio della sfera, si può ricorrere alla approssimazione di un triangolo piano, sul piano tangente alla sfera. Per una migliore approssimazione, Legendre ha dimostrato che un piccolissimo triangolo sferico è equivalente a un triangolo piano avente gli **stessi lati  $a, b, c$**  e angoli:

$$\alpha = A - \sigma / 3 \qquad \beta = B - \sigma / 3 \qquad \gamma = C - \sigma / 3$$

# Coordinate cartesiane e polari



Nelle applicazioni astronomiche in cui siano note le distanze all'astro useremo sia sistemi di riferimento cartesiani  $(x, y, z)$  che sistemi di riferimento polari sferici  $(r, \lambda, \beta)$ , a seconda della convenienza.

Le trasformazioni da polari a cartesiane sono:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda \\ z &= r \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{x}{r} dr - z \cos \lambda d\beta - y d\lambda \\ dy &= \frac{y}{r} dr - z \sin \lambda d\beta + x d\lambda \\ dz &= \frac{z}{r} dr + r \cos \beta d\beta \end{aligned}$$



# Da cartesiane a polari

Le trasformazioni inverse sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = r \arctan \frac{y}{x} \\ \beta = r \arcsin \frac{z}{r} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} dr = \cos \beta \cos \lambda dx + \cos \beta \sin \lambda dy + \sin \beta dz \\ r d\beta = -\sin \beta \cos \lambda dx - \sin \beta \sin \lambda dy + \cos \beta dz \\ r \cos \beta d\lambda = -\sin \lambda dx + \cos \lambda dy \end{array} \right.$$

Abbiamo dato anche l'espressioni dei differenziali, che sono utili per valutare sia l'effetto di piccoli incrementi che di errori di misure (e in tal caso conviene usare i moduli per massimizzare la stima dell'errore).

# Vettori

Il calcolo vettoriale è utilissimo nel caso del Sistema Solare, perché le distanze possono essere accuratamente determinate, ma trova impiego anche in problemi legati alla sfera celeste in generale.

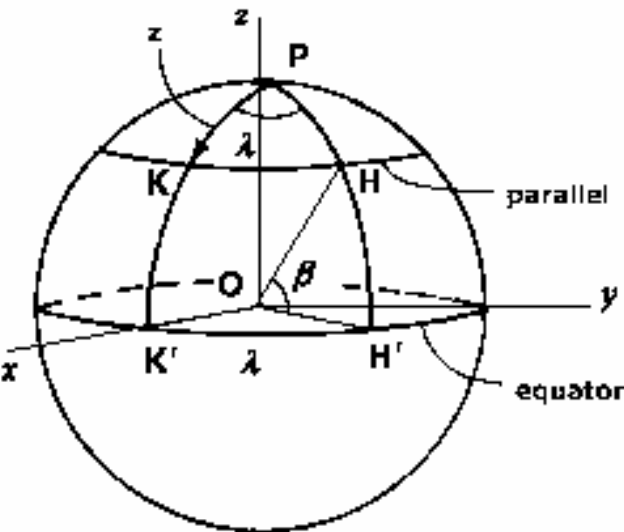
Siano  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  i vettori unitari lungo  $(x, y, z)$ ; la posizione del punto **H** sulla sfera unitaria può essere rappresentata dal vettore unitario  $\mathbf{r}_H$ :

$$\mathbf{r}_H(x, y, z) = \mathbf{r}_H(\lambda, \beta) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

e con riferimento alle coordinate angolari  $(\lambda, \beta)$  sarà:

$$x = \cos \lambda \cos \beta$$

$$y = \sin \lambda \cos \beta \quad z = \sin \beta$$



$$\hat{\mathbf{r}}_H = (x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

# Operazioni sui vettori - 1

Dati due vettori **a**, **b** la loro somma è il vettore **c** dato da:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}$$

Proprietà associativa e commutativa della somma:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \qquad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Il vettore differenza **d** è:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Il prodotto scalare tra due vettori è il numero *c* dato da :

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

# Operazioni sui vettori - 2

Il prodotto vettoriale è il vettore:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = ab \sin \theta \mathbf{u}$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettoriale gode della proprietà associativa, ma non di quella commutativa:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Il prodotto vettoriale si usa anche per definire il **momento** di una forza **F**: consideriamo un punto qualunque O e una forza **F** la cui direzione non passi per O. Si conduca da O un vettore **r** a un punto qualunque lungo la direzione di **F**. Il momento di **F** rispetto a O è il vettore **K**:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (rF \sin \theta) \mathbf{k}$$

# Operazioni sui vettori - 3

Un vettore può essere derivato e integrato:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i} \int a_x(t)dt + \mathbf{j} \int a_y(t)dt + \mathbf{k} \int a_z(t)dt$$

In Dinamica e in Meccanica Celeste si usa spesso (ma non sempre) indicare le derivate prime e seconde di un vettore nella seguente maniera:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}} \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{a}}}{dt} = \ddot{\mathbf{a}}$$

# Operazioni sui vettori - 4

E' importante ricordare che *non tutte* le entità specificate da un modulo e da una direzione sono vettori *bona fide*. La legge di composizione e la proprietà commutativa sono anche elementi essenziali per la definizione di vettore. In particolare, **rotazioni angolari finite di un corpo rigido non sono vettori**, perché non obbediscono alla proprietà commutativa. Tuttavia, **rotazioni infinitesime, e dunque anche le velocità angolari**, sono davvero vettori.

Incontreremo poi vettori  $\mathbf{r}$  riferiti a un sistema di coordinate ruotante con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto a un riferimento inerziale. La derivata totale di  $\mathbf{r}$  rispetto agli assi inerziali sarà:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{inerziale}} = \dot{\mathbf{r}}_{\text{relativa}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

# Che trasformazioni applicare?

Come si è accennato, le trasformazioni tra i vari sistemi di riferimento che tra poco introdurremo sono delle roto-traslazioni *rigide*. Ne vedremo vari esempi.

Tuttavia, nelle trasformazioni tra riferimenti *in moto relativo* può intervenire la velocità finita della luce a alterare le direzioni apparenti degli astri.

Quando poi dovremo trasformare sistemi di riferimento di velocità e di accelerazione (derivate prime e seconde delle posizioni rispetto al tempo), sorgerà una ulteriore difficoltà:

- le derivate vanno fatte rispetto al *tempo*, e allora quale tempo si deve usare? Ne daremo varie definizioni operative.

Approfondiremo questi concetti dopo aver trattato i vari sistemi di riferimento.