

Capitolo 7

Telescopi

Consideriamo il più semplice tipo di telescopio: un obiettivo (lente o specchio) di diametro D e lunghezza focale F .

Definiamo **rapporto di apertura** $f/$ la quantità F/D . Il telescopio Galileo di Asiago, dopo le recenti modifiche (sostituzione dello specchio secondario, metà del 2011) ha $D = 120$ cm e lunghezza focale equivalente $F = 1200$ cm, quindi il suo rapporto di apertura è $f/10$. Mentre il telescopio Copernico di Cima Ekar ha $D = 182$ cm e $F = 1638$ cm, quindi è un $f/9$. (Attenzione, non stiamo considerando qui le lunghezze focali dei singoli specchi primari ma quella totale).

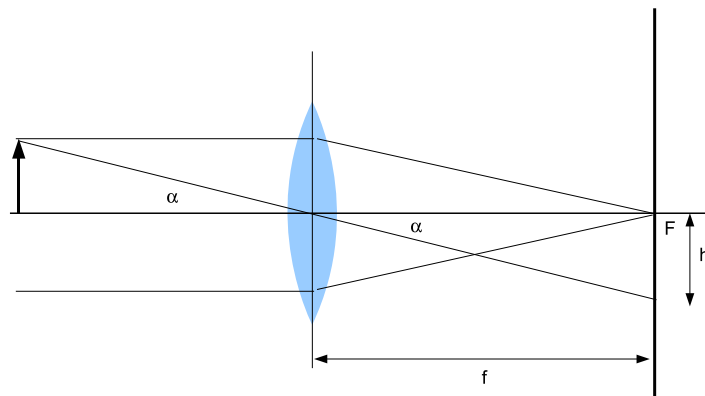


Figura 7.1:

Consideriamo una sorgente in cielo di dimensione angolare α . Sia y la sua dimensione

lineare sul piano focale del telescopio. Come si vede dalla Fig. 7.1 :

$$\frac{h}{F} = \tan\alpha \cong \alpha \Rightarrow h = F\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{h} = \frac{1}{F}$$

con α in radianti. Definiamo **scala del telescopio** la quantità $S = \frac{\theta}{h}$, dove $\theta = \alpha \cdot 206265$ è la dimensione angolare della sorgente in secondi d'arco. Per cui:

$$S = \frac{\theta}{h} = \frac{206265}{F} \quad (7.1)$$

La lunghezza focale si esprime in *mm* e la scala in unità di **arcsec/mm**.

Quindi, nota la dimensione angolare di una sorgente e la focale del telescopio, è facilmente calcolabile la dimensione lineare dell'immagine che si forma sul piano focale.

Consideriamo come esempio la Luna piena che ha un diametro angolare di circa 30'. Il telescopio di Asiago ha una scala di circa 17"/*mm*, e quindi la Luna ha un diametro di circa 106 mm sul piano focale. Il telescopio di Cima Ekar ha una scala di circa 12.6"/*mm* e quindi la Luna ha un diametro lineare di circa 143 mm.

Un telescopio con obiettivo più grande raccoglie una maggior quantità di luce, questa in particolare cresce con l'area della lente o dello specchio, quindi con il quadrato del raggio o del diametro. Quindi il 182 cm raccoglie 2.22 volte la luce raccolta dal 120 cm. D'altra parte, il 182 cm ha una lunghezza focale superiore al 120 cm, e questo implica che ogni mm^2 sul piano focale dei due telescopi corrisponde ad un'area di cielo minore nel caso del 182 cm ($12.6 \times 12.6 \text{ arcsec}^2$) rispetto al 120 cm ($17 \times 17 \text{ arcsec}^2$), e quindi minore quantità di luce raccolta. In particolare, dal rapporto (elevato al quadrato) fra le due lunghezze focali si ottiene un fattore circa 1.8 a favore del 120 cm, e quindi in definitiva il telescopio di Cima Ekar è appena 1.2 volte più luminoso del telescopio Galileo.

Questi calcoli non sono in realtà corretti perché non tengono conto della presenza in entrambi i telescopi dello specchio secondario, che causa ostruzione. In particolare, il secondario del 182 cm ha un diametro di 58 cm, mentre il secondario del 120 cm ha un diametro di 52 cm. Per cui il rapporto fra la quantità di luce raccolta dallo specchio primario del 182 cm e quella raccolta dal 120 cm, vale $(182^2 - 58^2)/(120^2 - 52^2) = 2.54$. In definitiva, il 180 cm è più luminoso del 120 cm di un fattore circa 1.4.

Se accoppiamo due sistemi ottici, ad esempio due lenti, di cui una sarà l'obiettivo e l'altra l'oculare, in modo tale che i loro piani focali coincidano, possiamo calcolare l'ingrandimento prodotto da questo telescopio (Fig. 7.2):

$$\tan\alpha = \frac{h}{F_1} \quad \tan\beta = \frac{h}{F_2}$$

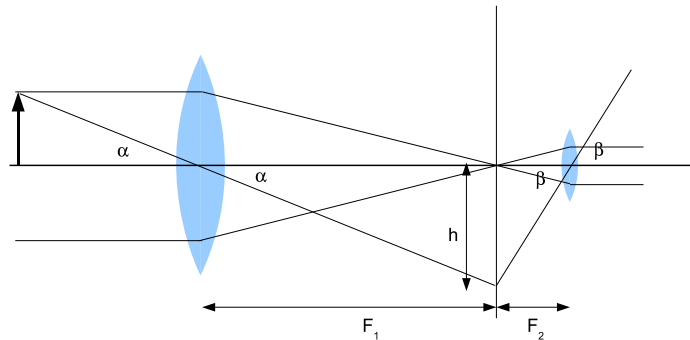


Figura 7.2:

$$I = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h}{F_2} \cdot \frac{F_1}{h} = \frac{F_1}{F_2}$$

cioè il numero di ingrandimenti si calcola dal rapporto fra la lunghezza focale del obiettivo e la lunghezza focale dell'oculare. Ad esempio un telescopio con $F_1 = 4$ m a cui viene accoppiato un oculare che ha $F_2 = 20$ mm, produce 200 ingrandimenti.

7.1 Il telescopio riflettore

Consideriamo l'equazione della conica generica, così come scritta usualmente in astronomia:

$$(1 + b)z^2 - 2Rz + r^2 = 0 \quad (7.2)$$

dove z e r sono le variabili delle coordinate cilindriche $(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z)$, e R è il raggio di curvatura della conica.

Al variare di b , cambia il tipo di conica:

$b > 0$	ellissoide prolato
$b = 0$	sfera
$-1 < b < 0$	ellissoide oblato
$b = -1$	paraboloide
$b < -1$	iperboloide

Esplicitiamo z in funzione di r :

$$z = \frac{R - \sqrt{R^2 - (1+b)r^2}}{1+b} = \frac{R}{1+b} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \right]$$

(Delle due soluzioni consideriamo quella con il $-$ perché $z < R$.)

Cosideriamo il termine sotto radice quadrata: poiché $\frac{r}{R} \ll 1$ si può espandere in serie di Taylor. Se chiamiamo $u = -\frac{r^2}{R^2}(1+b)$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{1+u} \cong 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \dots$$

Da cui:

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}(1+b) - \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 - \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 - \dots$$

Sostituendo nell'espressione di z si ha:

$$\begin{aligned} z &= \frac{R}{1+b} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}(1+b) + \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 + \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 + \dots \right] \\ z &= \frac{1}{2} \frac{r^2}{R} + \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^3}(1+b) + \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^5}(1+b)^2 + \dots \end{aligned}$$

Consideriamo ora una conica qualunque (Fig.7.3): la normale alla superficie varia punto per punto. La si può determinare derivando z rispetto a r :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= -\frac{1}{2} \frac{R}{1+b} \frac{-\frac{1+b}{R^2} 2r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)}} = \frac{\frac{r}{R}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)}} = \\ &= \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{1+b}{R}z} = \frac{r}{R - (1+b)z} = \tan \vartheta \end{aligned}$$

La lunghezza focale sarà $f = z + z_0$ e come si vede dalla figura $\tan 2\vartheta = \frac{r}{z_0}$, da cui:

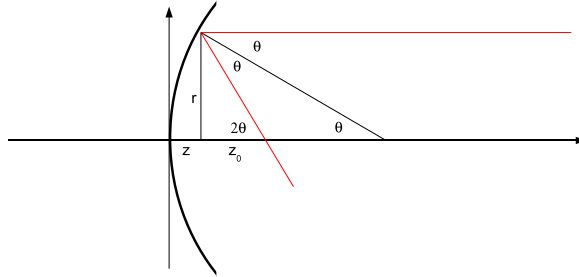


Figura 7.3:

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta} = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta(1 - \tan^2\vartheta)} = \frac{2\tan\vartheta}{1 - \tan^2\vartheta} = \frac{r}{z_0}$$

$$z_0 = \frac{r(1 - \tan^2\vartheta)}{2\tan\vartheta}$$

Sostituendo il valore di $\tan\vartheta$, si ottiene:

$$z_0 = \frac{r \left(1 - \frac{r^2}{(R - (1+b)z)^2} \right)}{2 \frac{r}{R - (1+b)z}} = \frac{r}{2} \left[\frac{R - (1+b)z}{r} - \frac{r}{R - (1+b)z} \right]$$

Calcoliamo ora l'espressione per la lunghezza focale:

$$f = z + \frac{R - (1+b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]} = \frac{R}{2} + \frac{(1-b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]}$$

E sostituendo l'espressione di z in serie di Taylor:

$$f = \frac{R}{2} - (1+b)\frac{r^2}{4R} - (1+b)(3+b)\frac{r^4}{16R^3} - \dots \quad (7.3)$$

Quando $b = -1$, cioè quando la conica è un paraboloido, si ottiene $f = \frac{R}{2}$.

Riprendiamo adesso le espressioni dei termini di aberrazione visti nel capitolo precedente e scriviamo la funzione di aberrazione (con l'assunzione $x_0 = 0$):

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 - Cy_0\eta_1^2 - \frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Ey_0^3\eta_1 + Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B\rho^4 - Cy_0^2\rho^2\cos\vartheta - \frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2 + Ey_0^3\rho\cos\vartheta + Fy_0\rho^3\cos\vartheta$$

Sul piano delle immagini, l'aberrazione lungo gli assi cartesiani XY, vale:

$$\Delta x = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\xi_1} = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Dy_0^2\xi_1 - 2Fy_0\xi_1\eta_1$$

$$\Delta x = B\rho^3\sin\vartheta + Dy_0^2\rho\sin\vartheta - 2Fy_0\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Delta y = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 2Cy_0^2\eta_1 + Dy_0^2\eta_1 - Ey_0^3 - Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

$$\Delta y = B\rho^3\cos\vartheta + (2C + D)y_0^2\rho\cos\vartheta - Ey_0^3 - Fy_0\rho^2(2\cos^2\vartheta + 1)$$

Delle 5 aberrazioni, consideriamo le 3 che fanno perdere di stigmatismo al sistema: sferica, coma e astigmatismo.

Chiamiamo y il raggio dello specchio primario del telescopio, mentre φ sia la dimensione angolare della sorgente osservata. Sappiamo che l'aberrazione sferica trasforma una sorgente puntiforme in un disco di diametro $2By^3$, la coma invece in una figura appuntita di dimensione complessiva $3Fy^2\varphi$, e infine l'astigmatismo in una figura allungata di dimensioni $2Cy\varphi^2$. I coefficienti di aberrazione B, C, F sono stati calcolati da Schwarzschild per un telescopio con due specchi:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3f_1^4}$$

$$C = \frac{f_1(f - d)}{2f^2(f_1 - d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d^2}{8f^3f_1^2(f_1 - d)}$$

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d}{8f^3f_1^3}$$

In queste formule, f, f_1, f_2 sono la focale equivalente $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$, la focale dello specchio primario, la focale dello specchio secondario. d è la distanza fra primario e secondario. b_1, b_2 sono i coefficienti delle coniche dei due specchi.

Vediamo adesso in sequenza i principali tipi di telescopi.

7.2 Telescopio Newton

Si tratta di un telescopio composto essenzialmente da un unico specchio. Infatti il secondario è uno specchio piano che ha l'unica funzione di deviare i raggi di luce in direzione ortogonale a quella di arrivo (Fig. 7.4).

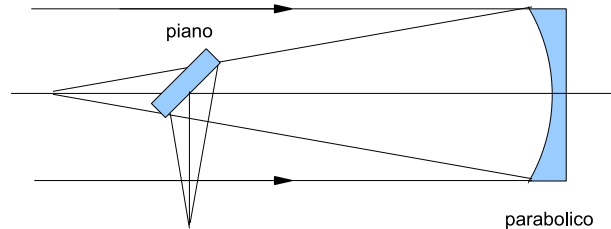


Figura 7.4:

In questo caso assumiamo $f \equiv f_1$ e $f_2 = 0$.

I coefficienti di aberrazione diventano:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f^3} \quad C = \frac{1}{2f} \quad F = \frac{1}{4f^2}$$

Per poter eliminare l'aberrazione sferica, bisogna che $B = 0$. Questo significa che $b_1 = -1$, cioè lo specchio deve essere **parabolico**.

Nel caso di specchio sferico: $b_1 = 0$. Ipotizziamo $D = 120$ cm e $f = 600$ cm. L'aberrazione sferica è data da:

$$\tilde{\Phi}_B = By^3 = \frac{1}{8f^3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} \left(\frac{120}{600}\right)^3 \cdot 206265 \cong 26''$$

Le aberrazioni di coma e astigmatismo sono date da:

$$\tilde{\Phi}_F = 3 \frac{1}{4f^2} y^2 \varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{D}{2f} \right)^2 \varphi$$

$$\tilde{\Phi}_C = 2 \frac{1}{2f} y \varphi^2 = \frac{D}{2f} \varphi^2$$

Supponiamo che $\varphi = 10'$, otteniamo:

$$\tilde{\Phi}_F = \frac{3}{4} \left(\frac{60}{600} \right)^2 (10 \cdot 60) = 4.5''$$

$$\tilde{\Phi}_C = \frac{60}{600} (10 \cdot 60)^2 = 0.17''$$

Applicando la scala del telescopio: $S = \frac{206265}{6000} \cong 34.4''/mm$, i valori angolari di aberrazione diventano:

$$\tilde{\Phi}_B \cong 760\mu \quad \tilde{\Phi}_F \cong 130\mu \quad \tilde{\Phi}_C \cong 5\mu$$

Se immaginiamo di porre sul piano focale del telescopio un sensore digitale (CCD) avente pixel di dimensioni tra 13 e 15 μ , è possibile calcolare l'estensione delle aberrazioni nell'immagine.

7.3 Telescopio Cassegrain

Come si nota dai calcoli precedenti, uno specchio parabolico è privo di aberrazione sferica, ma ha una forte aberrazione di coma. Per ridurre questa bisogna intervenire inserendo uno specchio secondario e allungando la focale del telescopio.

Prendiamo quindi in considerazione un sistema ottico formato da due specchi. Imporre la condizione che l'aberrazione sferica del sistema sia nulla, significa imporre che:

$$\tilde{\Phi}_B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \quad b_2 = - \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2$$

Quindi il primario deve essere ancora **parabolico**.

Poiché $f + f_1 > |f - f_1|$, si trova facilmente che $b_2 < -1$, cioè che lo specchio secondario deve essere un **iperbolico**.

D'altra parte con queste soluzioni, il coefficiente dell'aberrazione di coma vale $F = \frac{1}{4f^2}$ come prima. Stavolta però f è la focale equivalente del telescopio.

Per ridurre la coma la lunghezza focale deve aumentare. Partiamo allora dall'espressione della focale equivalente del sistema ottico:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f > f_1 \Rightarrow \frac{1}{f} < \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0$$

- Primo caso: $f_2 < 0$ (secondario **convesso**)

$$-\frac{1}{|f_2|} + \frac{d}{f_1 |f_2|} < 0 \Rightarrow d < f_1$$

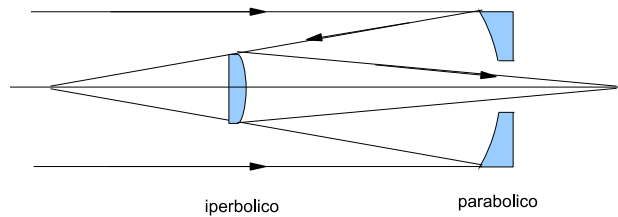


Figura 7.5:

- Secondo caso: $f_2 > 0$ (secondario **concavo**)

$$\frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0 \Rightarrow d > f_1$$

Nel primo caso il telescopio è in configurazione **Cassegrain** (Guillaume Cassegrain, Francia, 1672), nel secondo si ha invece una specie di telescopio Gregoriano (James Gregory, Scozia, 1663), anche se in realtà il Gregoriano utilizza un secondario concavo di superficie **ellissoidale**.

La configurazione Cassegrain consente quindi di ottenere telescopi con lunghezze focali lunghe mantenendo il telescopio di dimensioni relativamente compatte. Si noti che il

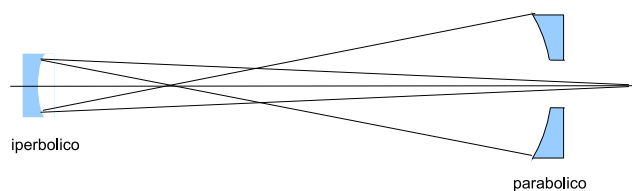


Figura 7.6:

piano delle immagini è localizzato dietro lo specchio primario.

Riprendiamo il caso del telescopio di Asiago (che è un Cassegrain), con lunghezza focale equivalente $F = 1200$ cm e con distanza $d = 372$ cm fra primario e secondario. Calcoliamo l'aberrazione di coma e di astigmatismo a $10'$ di distanza dal centro del campo (dove l'asse ottico principale incontra il piano delle immagini).

$$\tilde{\Phi}_F = \frac{3}{4} \left(\frac{60}{1200} \right)^2 (10 \cdot 60) \cong 1.125''$$

$$C = \frac{600 \cdot (1200 - 372)}{2 \cdot 1200^2 (600 - 372)} = 7.56 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\tilde{\Phi}_C = 2 \cdot 7.56 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \left(\frac{10 \cdot 60}{206265} \right)^2 \cdot 206265 \cong 0.16''$$

Usando la scala del telescopio, che ora vale $S = \frac{206265}{1200} \cong 17''/mm$. Una dimensione angolare in $10'$ si traduce sul piano focale in 66μ di coma e 9.4μ di astigmatismo, cioè circa 5 px e < 1 px assumendo di utilizzare un CCD con pixel da 13μ . In questo caso, l'astigmatismo è trascurabile e la coma è al di sotto delle condizioni tipiche di seeing dell'osservatorio, quindi entro $10'$ di raggio non si osserva.

Si noti infine che il valore della costante della superficie conica del secondario è:

$$b_2 = - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600} \right)^2 = -9$$

7.4 Telescopio Ritchey-Chrétien

È possibile eliminare aberrazione sferica e coma allo stesso tempo?

$$B(b_1, b_2) = 0 \quad F(b_2) = 0$$

$$B = 0 \Rightarrow \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - K \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3 f_1^4} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} + K \frac{(f - f_1)^3 d}{8f^3 f_1^3} = 0$$

dove $K = b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$.

Dalla seconda equazione ricaviamo che:

$$K = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3 d} = b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

da cui:

$$b_2 = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3 d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

Sostituendo il valore di b_2 nell'espressione del coefficiente B , si ottiene:

$$\frac{1 + b_1}{8f_1^3} + \frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3 d} \frac{(f-f_1)^3(f_1-d)}{8f^3 f_1^4} = 0$$

da cui si ricava l'espressione per il termine b_1 :

$$b_1 = -1 - 2 \frac{f_1 - d}{d} \left(\frac{f_1}{f}\right)^2$$

Se $f_1 > d$, cioè se primario e secondario si trovano a distanza minore della focale del primario, così come avviene nel Cassegrain, si ottiene che $b < -1$, cioè il primario deve essere **iperbolico**.

D'altra parte se consideriamo l'espressione di b_2 :

$$b_2 = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

vediamo che il primo termine è sicuramente negativo, il secondo è minore di 1 e quindi anche $b_2 < -1$, cioè anche il secondario è **iperbolico**.

Il telescopio che unisce primario iperbolico a secondario iperbolico fu ideato da George Willis Ritchey e Henri Chrétien (Fig. 7.7).

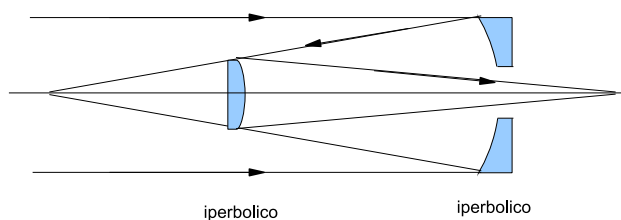


Figura 7.7:

Ipotizziamo che il telescopio di Asiago sia un Ritchey-Chrétien e calcoliamo le costanti delle coniche relative ai due specchi:

$$b_1 = -1 - 2 \frac{600 - 372}{372} \left(\frac{600}{1200}\right)^2 = -1.30$$

$$b_2 = -\frac{2 \cdot 1200 \cdot 600^3}{372(1200 - 600)^3} - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600}\right)^2 = -15.45$$

Si faccia attenzione al fatto che al fuoco primario questo telescopio non è esente da aberrazione sferica ($B \neq 0$)!

Calcoliamo adesso il valore dell'astigmatismo.

$$\begin{aligned} C &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3 d^2}{8f^3 f_1^2 (f_1-d)} \\ C &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3 d} \frac{(f-f_1)^3 d^2}{8f^3 f_1^2 (f_1-d)} = \\ &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{f_1 d}{4f^2(f_1-d)} = \frac{2f_1 f - 2f_1 d + f_1 d}{4f^2(f_1-d)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{f_1(2f - d)}{4f^2(f_1 - d)}$$

Sostituendo i soliti valori si ottiene:

$$C = \frac{600(2 \cdot 1200 - 372)}{4 \cdot 1200^2(600 - 372)} \cong 9.27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

E infine:

$$\tilde{\Phi}_C = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \left(\frac{10 \cdot 60}{206265} \right)^2 \cdot 206265 \cong 0.19''$$

Ancora una volta l'astigmatismo ha valori analoghi a quelli trovati per il Newton e per il Cassegrain.

7.5 Telescopio Schmidt

Il telescopio ideato da Bernhard Schmidt nel 1930 è costituito da un unico specchio di forma sferica.

È diaframmato per cercare di ridurre l'aberrazione sferica da cui è affetto.

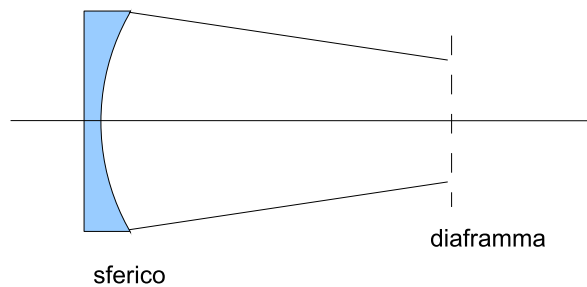


Figura 7.8:

Rispetto ai casi precedenti in cui pupilla di entrata e di uscita coincidevano con lo specchio primario, qui la pupilla di entrata è il diaframma ($f_1 \rightarrow \infty$) mentre la focale

del telescopio coincide con quella dello specchio sferico ($f \equiv f_2$) (Fig. 7.8). Quindi le equazioni di Schwarzschild diventano:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{f}{f_1} + 1 \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}{8f^3 f_1^4}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} B = -[b_2 + 1] \frac{-1}{8f^3} = \frac{1 + b_2}{8f^3} = B_0$$

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{f}{f_1} + 1 \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d}{8f^3 f_1^3}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{4f^2} + [b_2 + 1] \frac{-d}{8f^3} = F_0 - dB_0$$

avendo indicato $F_0 = \frac{1}{4f^2}$.

$$C = \frac{f_1(f-d)}{2f^2 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)} - \left[b_2 + \left(\frac{f}{f_1} + 1 \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d^2}{8f^3 f_1^3 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} C = \frac{f-d}{2f^2} - [b_2 + 1] \frac{-d^2}{8f^3} = \frac{1}{2f} - \frac{d}{2f^2} + d^2 \frac{1 + b_2}{8f^3} = C_0 - 2dF_0 + d^2 B_0$$

avendo indicato $C_0 = \frac{1}{2f}$.

Quindi riassumendo abbiamo:

$$B = B_0$$

$$F = F_0 - dB_0$$

$$C = C_0 - 2dF_0 + d^2 B_0$$

Nel caso di uno specchio parabolico, $B_0 = 0$ e quindi $F = F_0$, cioè l'aberrazione di coma non dipende dalla distanza della pupilla di entrata.

In uno specchio sferico $B_0 \neq 0$, ma possiamo cercare il valore di d che annulli sia F che C .

Intanto in uno specchio sferico $b_2 = 0$ e quindi $B = \frac{1}{8f^3}$.

Annullando l'aberrazione di coma si ha:

$$F = \frac{1}{4f^2} - d \frac{1}{8f^3} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

e considerando che $f = \frac{R}{2}$, si ottiene $d = R$, con R raggio di curvatura dello specchio. Quindi per annullare la coma, bisogna porre il diaframma in coincidenza con il centro di curvatura dello specchio, ad una distanza dallo specchio pari al doppio della distanza focale.

Sostituiamo adesso questo valore di d , nell'espressione di C :

$$C = \frac{1}{2f} - \frac{2f}{2f^2} + \frac{1}{8f^3}(2f)^2 = \frac{1}{2f} - \frac{1}{f} + \frac{1}{2f} = 0$$

Quindi la condizione $d = 2f$ annulla sia la coma che l'astigmatismo.

Ma resta il problema dell'aberrazione sferica. È chiaro che più il diaframma è chiuso e minore è la sferica perché si vanno a utilizzare raggi sempre più parassiali, d'altra parte minore è la quantità di luce che entra, e si finisce per non sfruttare la superficie dello specchio come collettore di luce. Serve quindi una soluzione ottica per correggere l'aberrazione sferica: una **lente correttiva** che sia in grado di trasformare uno specchio sferico in parabolico!

... Per produrre uno specchio parabolico da uno specchio sferico, il bordo esterno di quest'ultimo deve essere appiattito, cioè deve essere impresso ad esso un raggio di curvatura più grande... (B. Schmidt)

Consideriamo l'equazione del profilo di una superficie sferica di raggio R . Sia D il diametro dello specchio e $P(x, y)$ un punto sulla superficie (Fig. 7.9):

$$(R - x)^2 + y^2 = R^2$$

Esplicitando x e mettendosi nell'ipotesi che $\frac{y}{R} < 1$, si ha:

$$R^2 + x^2 - 2Rx + y^2 = R^2$$

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} \cong \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{8R^3} + \dots$$

(Si usa la soluzione con il - perché $x < R$)

Il termine $\frac{y^2}{2R}$ rappresenta il profilo parabolico, mentre il termine $\frac{y^4}{8R^3}$ è l'eccesso di convergenza dello specchio sferico rispetto al parabolico. Per cui, trascurando termini di ordine superiore, possiamo dire che la quantità $\Delta = \frac{y^4}{8R^3}$ è di fatto il cammino ottico da aggiungere ai raggi paralleli all'asse ottico principale che incidono sullo specchio sferico

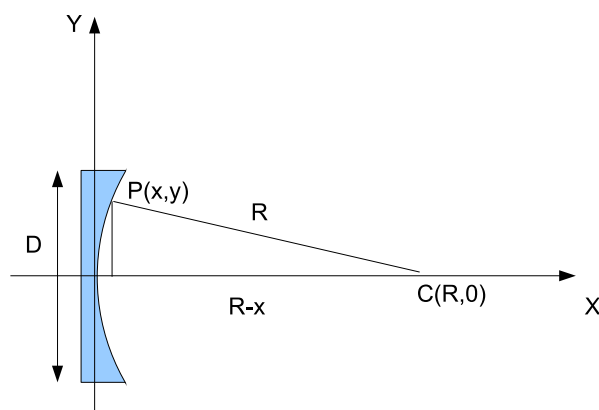


Figura 7.9:

a distanza y dall'asse per ottenere l'equivalente parabolico.

È possibile compensare questo cammino ottico con una lastra correttiva a riflessione oppure con una a rifrazione. Nel secondo caso si dimostra che la lastra correttiva deve avere una curvatura quattro volte maggiore, rispetto a quella a riflessione, e il suo profilo più semplice sarà dato da (Fig. 7.12):

$$T(y) = T(0) + 4 \frac{y^4}{8R^3}$$

Questa equazione assume che l'indice di rifrazione del vetro sia $n = 1.5$.

... In generale, al fine di ottenere per rifrazione la stessa deviazione data dalla riflessione, bisogna dare un'inclinazione 4 volte più grande... (B. Schmidt)

Nel caso della riflessione, l'angolo di deviazione è dato da:

$$\delta_{rifl} = \pi - (\hat{i} + \hat{r}) = \pi - 2\hat{r}$$

Invece in caso di rifrazione:

$$\delta_{rifr} = \pi - (\hat{i} - \hat{r})$$

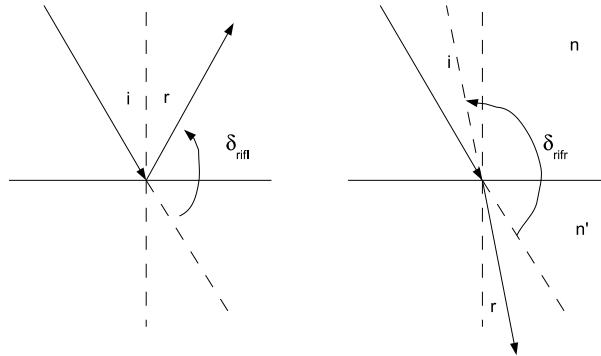


Figura 7.10:

Applicando la legge di Snell nell'approssimazione di angoli piccoli, $\frac{\hat{i}}{\hat{r}} \cong \frac{n'}{n}$, e assumendo i raggi luminosi passano da aria a vetro, $n = 1, n' \cong 1.5$ si ha:

$$\hat{i} \cong \frac{3}{2} \hat{r}$$

$$\delta_{rifr} = \pi - \left(\frac{3}{2}\hat{r} - \hat{r}\right) = \pi - \frac{1}{2}\hat{r}$$

Da cui si deduce che per avere $\delta_{rifr} = \delta_{rifl}$ é necessario che l'angolo di rifrazione sia 4 volte maggiore.

Inoltre, consideriamo due diottri sferici concentrici con raggi di curvatura diversi, e un raggio di luce parallelo all'asse ottico e distante h da esso. L'angolo di incidenza (come si vede in Fig. 7.11) varia al variare del raggio di curvatura del diottero, in particolare $\hat{i} \cong \frac{h}{R}$ e quindi decresce quando R cresce.

Di conseguenza, la curvatura del profilo della lastra correttrice deve essere quattro volte maggiore di quella di un profilo riflettente per ottenere la stessa deviazione in ogni punto.

Nel caso più generale, il profilo della lastra sarà :

$$T(y) = T(0) + \frac{y^4}{8R^3} \left(\frac{2}{n-1}\right) = T(0) + \beta \frac{y^4}{4(n-1)}$$

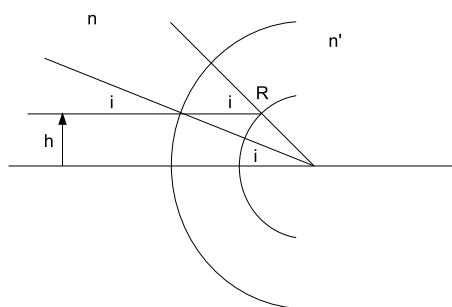


Figura 7.11:

dove $T(0)$ é lo spessore della lastra al centro.

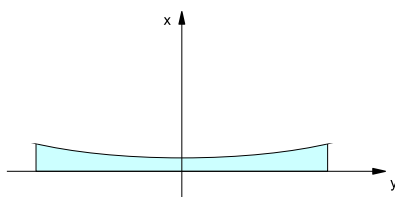


Figura 7.12:

Si dimostra che i coefficienti di aberrazione in presenza di lastra correttiva diventano:

$$B = \frac{1+b}{8f^3} - \beta$$

$$F = \frac{1}{4f^2} - d\beta$$

$$C = \frac{1}{2f} - d^2\beta$$

Deriviamo la condizione che annulla l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo. Abbiamo così 3 equazioni nelle 3 incognite (b, d, β).

$$C = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2fd^2}$$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} - d\frac{1}{2fd^2} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

da cui si ricava che $\beta = \frac{1}{8f^3}$ e $b = 0$.

Il sistema è quindi privo delle aberrazioni che gli fanno perdere di stigmatismo. Se trascuriamo la distorsione, resta solo la curvatura di campo, il cui coefficiente vale $|D| = \frac{1}{2f}$.

Una lastra correttrice del tipo descritto finora soffre di aberrazione cromatica.

... La situazione è alquanto diversa per le aberrazioni cromatiche della lastra correttrice. Per renderle piccole quanto più è possibile, la lastra correttrice deve essere modellata in modo tale che la parte centrale agisca come una lente convergente e che le parti esterne abbiano un effetto divergente... (B. Schmidt).

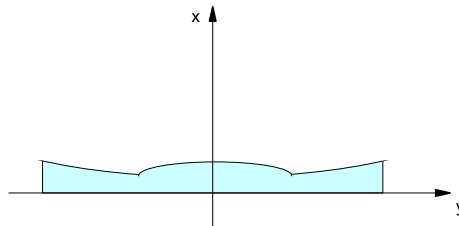


Figura 7.13:

La lastra correttrice con questa nuova forma (Fig. 7.13) avrà equazione:

$$T(y) = T(0) + \frac{y^4 - Ay^2}{32(n-1)f^3}$$

dove A è il termine che minimizza l'aberrazione cromatica e contiene il raggio di curvatura e un fattore di forma della lastra.

Se applichiamo il primo tipo di lastra otteniamo che i raggi parassiali la attraversano praticamente indisturbati, mentre i raggi marginali divergono dopo aver attraversato

la lastra in modo tale da produrre una convergenza più lunga e far coincidere il loro fuoco con quello dei raggi parassiali (Fig. 7.14).

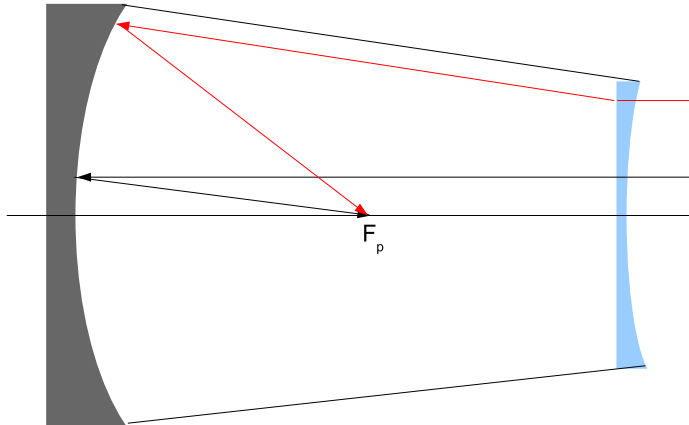


Figura 7.14:

Invece, utilizzando la seconda lastra correttiva vengono deviati sia i parassiali che i marginali, con il risultato che i parassiali anticipano la convergenza, mentre i marginali la ritardano e la posizione del fuoco   intermedia fra quella dei raggi parassiali e quella dei raggi marginali (in assenza di lastra correttiva) (Fig.7.15).

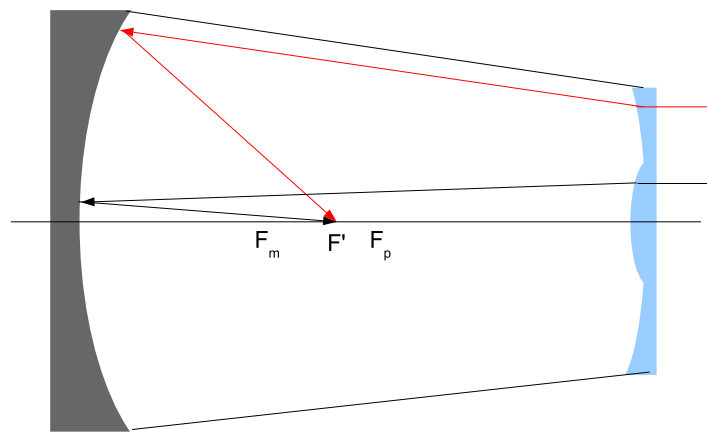


Figura 7.15:

