

## Capitolo 6

# Teoria di Seidel delle aberrazioni

### 6.1 L'equazione iconale

Passiamo ora alla trattazione delle aberrazioni al cosiddetto III° ordine, nota anche come Teoria di Seidel.

Cominciamo considerando l'onda piana che si propaga nella direzione dell'asse  $x$  (Fig. 6.1) :

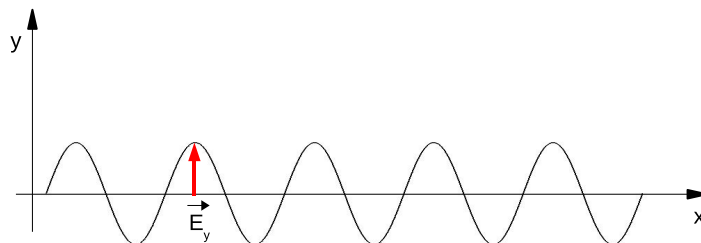


Figura 6.1:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

Essendo  $n = \frac{c}{v}$ , possiamo scrivere il campo elettromagnetico:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{nx}{c} \right) \right]$$

Più in generale, utilizzando la notazione complessa:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{nx}{c})}$$

Dalla definizione di numero d'onda nel vuoto  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  e frequenza di oscillazione  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , si ottiene:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi T}{\lambda_0 T} = \frac{\omega}{c}$$

da cui:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i(-nk_0x + \omega t)}$$

L'espressione generale per  $n = cost.$ , è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-n\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

Questa espressione soddisfa l'equazione di d'Alembert:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Se invece  $n \neq cost.$  e in particolare  $n = n(\vec{r})$ , ma varia comunque su scale molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, l'espressione per l'onda è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La funzione  $S(\vec{r})$  soddisfa l'**equazione iconale**:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2(\vec{r}) \tag{6.1}$$

Ricaviamo adesso questa equazione.

Assumiamo il caso generale in cui anche l'ampiezza dell'onda varia:  $E_0 = e^{A(\vec{r})}$ .

Per praticità di notazione, indichiamo  $A = A(\vec{r})$  e  $\phi = -k_0 S(\vec{r}) + \omega t$ .

Calcoliamo intanto la derivata prima di  $E$  rispetto ad  $\vec{r}$ :

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} = e^A \left( \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A e^{i\phi} \left( -ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right)$$

e poi la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{r}^2} &= e^A \left( \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \vec{r}^2} \right) e^{i\phi} + e^A \left( \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left( -ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \\ &+ e^A \left( \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left( -ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left( -ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \left( -ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left( -ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2} \right) = \\ &= e^A e^{i\phi} (\vec{\nabla} A)^2 + e^A e^{i\phi} \Delta A - i2k_0 e^A e^{i\phi} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - e^A e^{i\phi} k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 e^A e^{i\phi} \Delta S \end{aligned}$$

Ora calcoliamo la derivata prima e seconda di  $E$  rispetto al tempo  $t$ :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = e^A e^{i\phi} (i\omega)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = e^A e^{i\phi} (i\omega)^2 = -\omega^2 e^A e^{i\phi}$$

Sostituendo otteniamo:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - i2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 \Delta S + \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 = 0$$

$$\left[ (\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \right] + i \left[ -2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0 \Delta S \right] = 0$$

Separando parte reale da parte immaginaria, otteniamo due equazioni:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 = 0$$

$$2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S + k_0 \Delta S = 0$$

Esprimiamo il termine  $\frac{\omega}{v}$  in funzione di  $k_0$  e  $n$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T} \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n$$

Le due equazioni diventano:

$$\Delta A + (\vec{\nabla} A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\vec{\nabla} S)^2] = 0 \quad (6.2)$$

$$\Delta S + 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad (6.3)$$

A questo punto, nell'ipotesi in cui  $A(\vec{r})$  varia su scale molto grandi, cioè  $\vec{\nabla} A \approx 0$ , e di conseguenza  $\Delta A \approx 0$ , la prima equazione è soddisfatta se:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2$$

che è appunto l'equazione iconale.

## 6.2 Il teorema di Malus

Vediamo adesso il significato della funzione  $S(\vec{r})$ .

Da quanto detto prima, possiamo affermare che l'ottica geometrica è una sorta di caso limite dell'ottica ondulatoria per  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$(\vec{\nabla} S)^2 = \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} S$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)$$

Consideriamo di nuovo l'onda:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La condizione  $S(\vec{r}) = cost.$  definisce in ogni istante  $t$  i punti di ugual fase, cioè definisce l'**equazione della superficie d'onda**.

Nel caso di un'onda piana che si propaga in mezzo omogeneo ( $n = cost.$ ):

$$S = nx = cost. \quad \Rightarrow \quad x = cost.$$

cioè, nel caso di onde piane, le superfici d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione (Fig. 6.2).

Se abbiamo invece a che fare con un'onda nello spazio, conviene definire il versore:

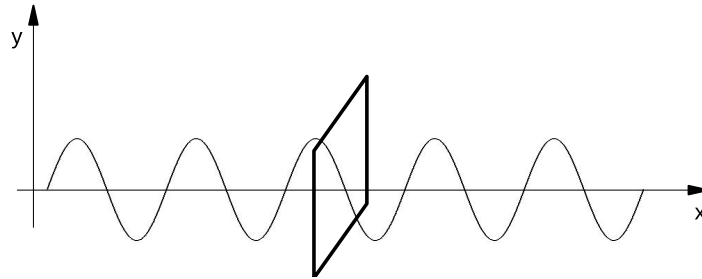


Figura 6.2:

$$\vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{n}$$

che indica la direzione e il verso di propagazione della superficie d'onda (Fig. 6.3).

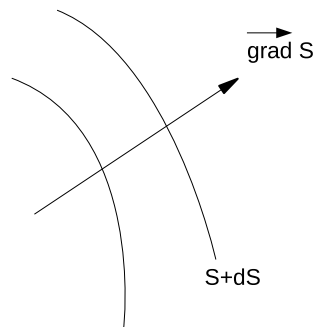


Figura 6.3:

### Prima proposizione del Teorema di Malus

*le superfici d'onda e i raggi luminosi in un mezzo isotropo qualsiasi formano due sistemi ortogonali*

Come si può facilmente capire, è lungo  $\vec{s}$  che si propaga l'energia. Infatti la quantità di energia elettromagnetica che ogni secondo si propaga attraverso una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione del campo elettromagnetico, è descritta la vettore di Poynting  $|\vec{P}| = |\vec{E} \wedge \vec{B}|$ , avente dimensione  $[P] = \text{Watt}/\text{m}^2$ .

Riprendiamo ora il concetto di cammino ottico: *cammino nel vuoto percorso dalla radiazione nel tempo impiegato a compiere il cammino reale (nel mezzo) fra due punti considerati.*

Se  $l$  è il percorso reale da un punto  $P_1$  a un punto  $P_2$  in un mezzo omogeneo, cioè con indice di rifrazione costante, si ha:

$$\bar{t} = \frac{l}{v} \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad l_0 = c\bar{t} = c\frac{l}{v} = c\frac{l}{\frac{c}{n}} = nl$$

Essendo  $n > 1$  si ha  $l_0 > l$ .

Se al contrario  $n \neq \text{cost.}$ , l'espressione per il cammino ottico sarà:

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds \quad (6.4)$$

dove  $s$  è l'ascissa curvilinea definita lungo il percorso.

Per un'onda piana in un mezzo omogeneo:

$$S(x) = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad nx = \text{cost}$$

che significa cammini ottici uguali.

Di conseguenza possiamo affermare che: *la superficie d'onda  $S(\vec{r})$  non è solo il luogo dei punti di ugual fase, ma è anche il luogo dei punti tali che i tragitti ottici da una fase all'altra sono gli stessi.*

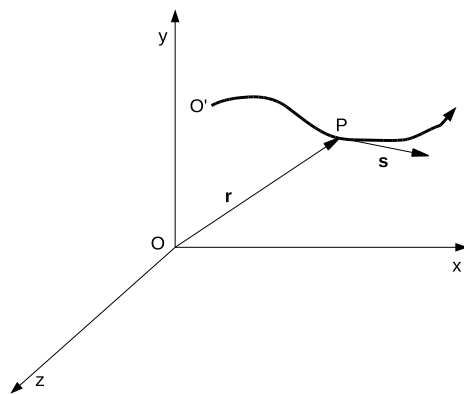


Figura 6.4:

In generale definiamo l'ascissa curvilinea  $\vec{s}$  (Fig. 6.4) come:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Dall'equazione iconale, moltiplicando scalarmente membro a membro  $\vec{s}$ , si ottiene:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

da cui:

$$n ds = \vec{\nabla} S \cdot d\vec{r}$$

$$n ds = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = dS$$

Introduciamo questo risultato nell'espressione del cammino ottico:

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n ds = S(P_2) - S(P_1) = S_2 - S_1$$

Essendo  $S_1, S_2$  superfici d'onda, ne segue che  $[P_1 P_2] = cost$ , indipendentemente dalla coppia di punti scelti, purché siano coppie di punti appartenenti a diverse superfici d'onda e intercettati da un medesimo raggio (*punti corrispondenti*).

### Seconda proposizione del Teorema di Malus

*I cammini ottici misurati fra punti corrispondenti qualsiasi di due superfici d'onda  $S_1$  e  $S_2$  sono sempre uguali fra loro*

Dalla Fig. 6.5, essendo  $(P_1, P_2)$  e  $(P'_1, P'_2)$  coppie di punti corrispondenti, possiamo scrivere:

$$[P_1 P_2] = [P'_1 P'_2]$$

$$nx_1 + n'x'_1 = nx_2 + n'x'_2$$

Si noti che: *si passa da superfici d'onda a raggi luminosi tramite derivazione.*

Quindi, in definitiva, raggi luminosi e leggi dell'ottica geometrica non sono in contraddizione con la concezione ondulatoria della luce.

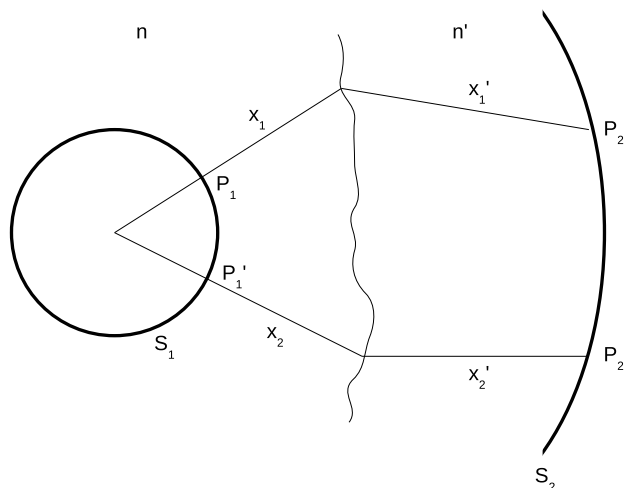


Figura 6.5:

### 6.2.1 Esempio

Vediamo cosa accade nel caso di una lente piano-convessa (Fig.6.6).

Consideriamo una sorgente all'infinito, i raggi che arrivano alla lente sono paralleli all'asse ottico. In altri termini possiamo dire che alla lente arrivano superfici d'onda piane e parallele fra loro.

Come sarà la superficie d'onda dopo che i raggi hanno attraversato la lente?

Dalla seconda proposizione del Teorema di Malus abbiamo:

$$[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$$

D'altra parte possiamo scrivere che:

$$[A_0A'] = \overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'}$$

$$[C_0C'] = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

Ora,  $\overline{A_0A_1} = \overline{C_0C_1}$ , mentre  $\overline{A_1A_2} < \overline{C_1C_2}$ , perché è minore il percorso fatto dal raggio dentro la lente. Segue che:  $\overline{A_2A'} > \overline{C_2C'}$ . Lo stesso può dirsi per il raggio  $B$ , simme-



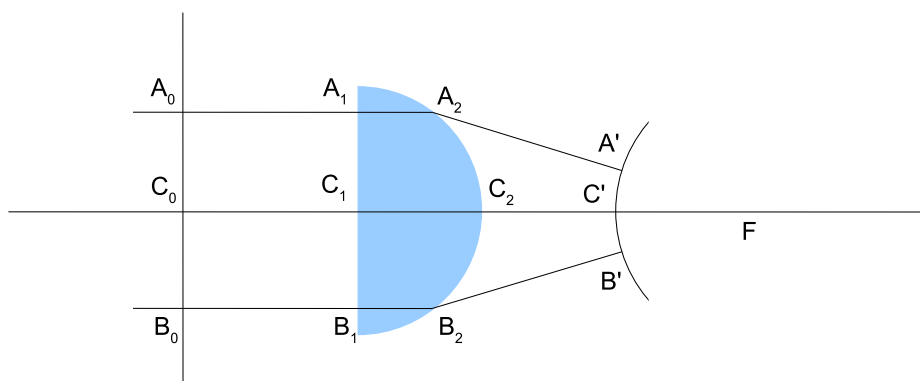


Figura 6.6:

trico di  $A$  rispetto all'asse ottico:  $\overline{B_2B'} > \overline{C_2C'}$ .

Si comprende facilmente che la superficie  $S_2$  è una superficie sferica con centro nel fuoco  $F$ .

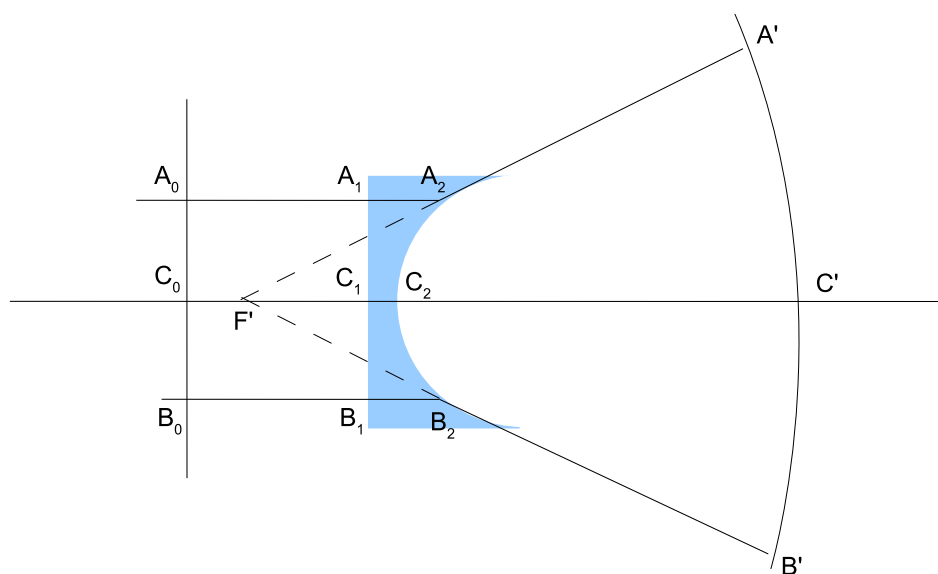


Figura 6.7:

Cambiamo il tipo di lente, consideriamo una lente piano-concava (Fig. 6.7).

Come prima:  $[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$ .

$$\overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'} = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

La lente è più sottile al centro e più spessa ai bordi, quindi:  $\overline{A_1A_2} > \overline{C_1C_2}$ , e  $\overline{B_1B_2} > \overline{C_1C_2}$ . Ne segue che:  $\overline{A_2A'} < \overline{C_2C'}$  e  $\overline{B_2B'} < \overline{C_2C'}$ .

Ancora una volta  $S_2$  è una superficie sferica, questa volta centrata sul fuoco  $F'$ .

In conclusione: *le due lenti mettendo a fuoco raggi paralleli, trasformano superfici d'onda piane in sferiche.*

### 6.3 La funzione di aberrazione

Prendiamo due superfici d'onda che si propagano in un mezzo non omogeneo ( $n \neq 0$ ) (Fig. 6.8). Il cammino ottico fra due punti corrispondenti  $P_0$  e  $P_1$  sarà costante:

$$[P_0 P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = S_1(P_1) - S_0(P_0)$$

Chiamiamo *funzione caratteristica di Hamilton*:

$$V(P_0, P_1) = [P_0 P_1]$$

il cammino ottico da  $P_0$  a  $P_1$  in funzione delle loro coordinate, cioè:

$$[P_0 P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = V(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = S(x_1, y_1, z_1) - S(x_0, y_0, z_0)$$

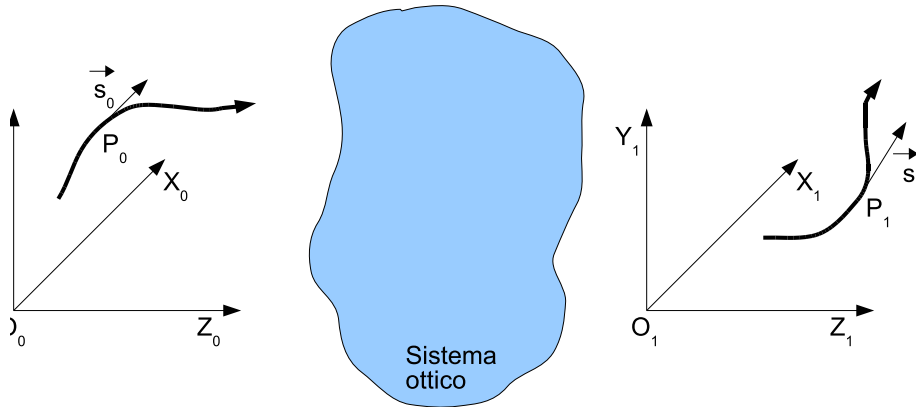


Figura 6.8:

Sappiamo che  $\vec{\nabla} S = n \vec{s}$ , per cui otteniamo:

$$\vec{\nabla}_{P_0} V = -\vec{\nabla} S(x_0, y_0, z_0) = -n \vec{s}_0$$

$$\vec{\nabla}_{P_1} V = n \vec{s}_1$$

e in generale possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla}_{P_i} V = \pm n \vec{s}_i \tag{6.5}$$

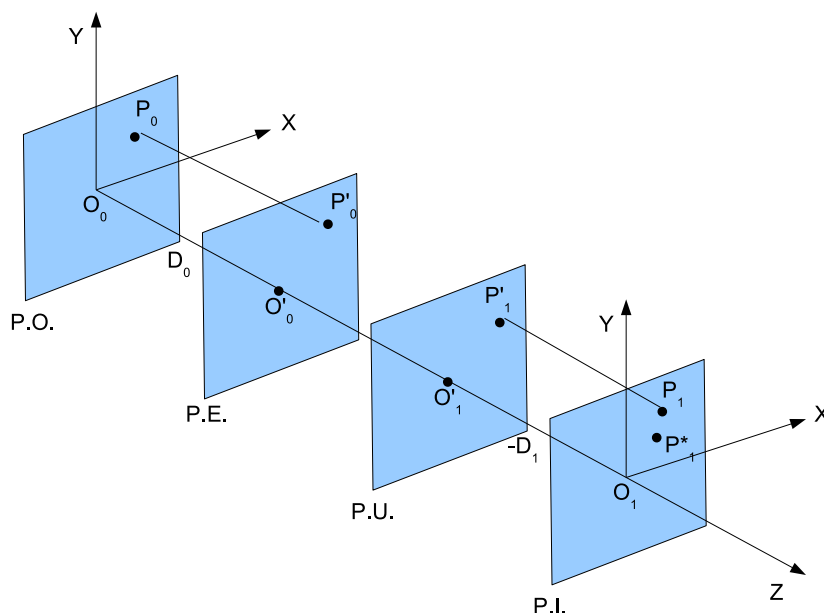


Figura 6.9:

Consideriamo adesso il piano degli oggetti, il piano della pupilla di entrata, il piano della pupilla di uscita e il piano delle immagini. Definiamo su ogni piano un sistema di assi cartesiani  $xyz$  di origine  $O_0$ ,  $O'_0$ ,  $O'_1$  e  $O_1$  rispettivamente. Le origini siano allineate lungo l'asse  $z$ , che coincide con l'asse ottico del sistema. Il piano della pupilla di entrata si trovi a distanza  $D_0$  dal piano degli oggetti, mentre il piano della pupilla di uscita si trovi a distanza  $-D_1$  dal piano delle immagini. Infine sia  $P_0$  un punto sul piano degli oggetti, e siano  $P'_0$ ,  $P'_1$  e  $P_1$ , le immagini del punto su ogni piano (Fig. 6.9). Se il sistema fosse privo di aberrazioni, l'immagine di  $P_0$  dovrebbe formarsi in  $P_1^*$ .

Definiamo quindi *aberrazione del raggio* la quantità  $\overline{P_1^*P_1} \equiv (X_1 - X_1^*, Y_1 - Y_1^*, 0)$ . È conveniente trattare il problema in termini di aberrazione d'onda usando l'equazione iconale: come i raggi si ottengono derivando le superfici d'onda, così le aberrazioni dei raggi si ottengono derivando le aberrazioni d'onda.

La Fig. 6.10 mostra il confronto fra un'ipotetica superficie d'onda  $S$  e la stessa aberrata  $W$ . Il cammino ottico da  $\overline{Q}$  a  $Q$  è la funzione di aberrazione:

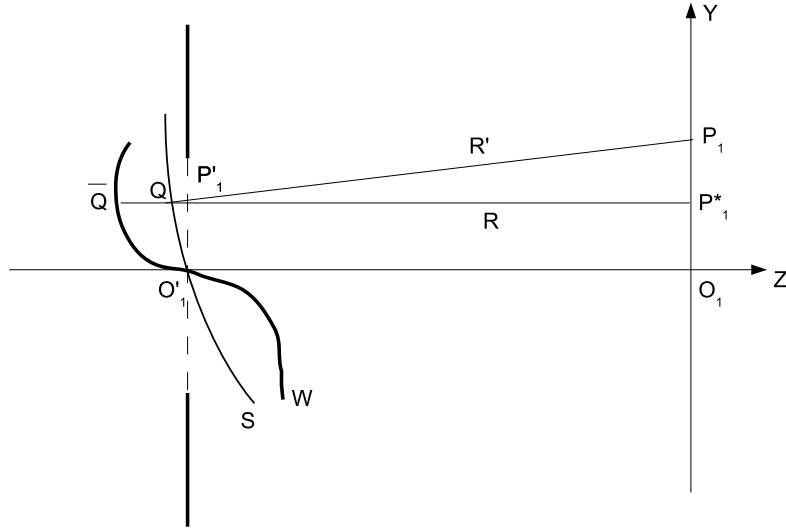


Figura 6.10:

$$\tilde{\Phi} = [\overline{Q}Q] = [P_0Q] - [P_0\overline{Q}]$$

Si assume che la funzione  $\tilde{\Phi} > 0$  quando entrambi  $\overline{Q}$  e  $P_1$  si trovano da lati opposti rispetto a  $Q$ .

Da quanto detto prima sappiamo che:

$$[P_0Q] = \int_{P_0}^Q n ds = S(Q) - S(P_0) = V_Q(P_0, Q)$$

dove  $Q \equiv Q(X, Y, Z)$  è tale che  $(X - X_1^*)^2 + (Y - Y_1^*)^2 + Z^2 = R^2$ .

Poiché  $\overline{Q}$  e  $O_1'$  appartengono allo stesso fronte d'onda, per la seconda proposizione del teorema di Malus, i cammini ottici da  $P_0$  a  $\overline{Q}$  e da  $P_0$  a  $O_1'$  coincidono.

$$[P_0\bar{Q}] = \int_{P_0}^{\bar{Q}} n \, ds = [P_0\bar{O}'_1] = \int_{P_0}^{O'_1} n \, ds = V_{\bar{Q}}(P_0, O'_1)$$

$$\tilde{\Phi} = V_Q(P_0, Q) - V_{\bar{Q}}(P_0, O'_1) = V_Q(X_0, Y_0, 0, X, Y, Z) - V_{\bar{Q}}(X_0, Y_0, 0, 0, 0, -D_1)$$

Deriviamo adesso la funzione di aberrazione:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \right|_Q = \frac{\partial V_Q}{\partial X} + \frac{\partial V_Q}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial X} = n_1(\vec{s})_X = n_1 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial Z} = n_1(\vec{s})_Z = n_1 \cos \gamma$$

dove  $\cos \alpha$  e  $\cos \gamma$  sono i coseni direttori di  $\vec{s}$ .

$$Z = \sqrt{R^2 - (X - X_1^*)^2 - (Y - Y_1^*)^2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{X - X_1^*}{Z}$$

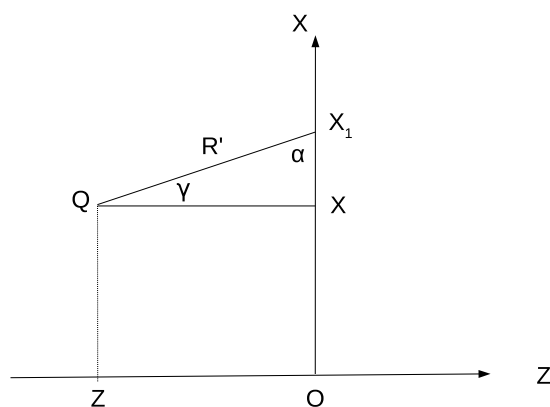


Figura 6.11:

Dalla Fig. 6.11 si vede che:

$$\cos \alpha = \frac{X_1 - X}{R'} \quad \cos \gamma = \frac{0 - Z}{R'}$$

da cui, sostituendo:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} = -n_1 \frac{X - X_1}{R'} - n_1 \frac{Z}{R'} \left( -\frac{X - X_1^*}{Z} \right) = \frac{n_1}{R'} (X_1 - X_1^*)$$

Si può dimostrare che con un ragionamento analogo si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y} = \frac{n_1}{R'} (Y_1 - Y_1^*)$$

Rigirando queste espressioni si ha:

$$X_1 - X_1^* = \frac{R'}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \quad Y_1 - Y_1^* = \frac{R'}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y}$$

Le derivate di  $\tilde{\Phi}$  si riferiscono al punto  $Q$ , che non ha una posizione fisicamente identificabile. È meglio utilizzare il punto  $P'_1$ , che si trova sul piano della pupilla di uscita. Inoltre le formule appena scritte contengono  $R'$  anziché  $R$ . Operiamo un cambio di variabili:  $\partial X \rightarrow \partial X'_1$ ,  $\partial Y \rightarrow \partial Y'_1$ ,  $R' \rightarrow -D_1$ ,  $\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X, Y) \rightarrow \tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1)$ .

$$X_1 - X_1^* = -\frac{D_1}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} \quad Y_1 - Y_1^* = -\frac{D_1}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y'_1}$$

Introduciamo a questo punto le *variabile ridotte di Seidel*.

Consideriamo il piano degli oggetti e delle immagini. Scegliamo un segmento arbitrario  $l_0$  come unità di lunghezza sul piano degli oggetti e il suo coniugato  $l_1$  sul piano delle immagini in modo tale che l'ingrandimento trasversale fra i due piani sia  $G = \frac{l_1}{l_0}$ .

Definiamo le coordinate ridotte  $x_0, y_0, x_1$  e  $y_1$  come:

$$\begin{aligned} x_0 &= C \frac{X_0}{l_0} & x_1 &= C \frac{X_1}{l_1} \\ y_0 &= C \frac{Y_0}{l_0} & y_1 &= C \frac{Y_1}{l_1} \end{aligned}$$

dove  $C$  è una costante arbitraria.

In approssimazione di Gauss ( $I^\circ$  ordine) si avrebbe:

$$\frac{x_0}{x_1} = C \frac{X_0}{l_0} \frac{l_1}{C X_1} = 1$$

$$\frac{y_0}{y_1} = C \frac{Y_0}{l_0} \frac{l_1}{CY_1} = 1$$

Scegliamo sui piani della pupilla di entrata e di uscita i segmenti arbitrari  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  tali che  $G = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{X'_0}{\lambda_0} & \xi_1 &= \frac{X'_1}{\lambda_1} \\ \eta_0 &= \frac{Y'_0}{\lambda_0} & \eta_1 &= \frac{Y'_1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

In approssimazione di Gauss si avrebbe  $\frac{\xi_0}{\xi_1} = 1$  e  $\frac{\eta_0}{\eta_1} = 1$ .

Effettuiamo un altro cambio di variabili della funzione di aberrazione:  $\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1) \rightarrow \tilde{\Phi}(x_0, y_0, \xi_1, \eta_1)$ .

$$\begin{aligned} X_1 - X_1^* &= \frac{l_1}{C}(x_1 - x_1^*) \cong \frac{l_1}{C}(x_1 - x_0) = -\frac{D_1}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} &= \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial X'_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1} \\ \frac{l_1}{C}(x_1 - x_0) &= -\frac{D_1}{n_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

Da cui si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= -\frac{D_1}{n_1} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \\ y_1 - y_0 &= -\frac{D_1}{n_1} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} \end{aligned}$$

Convienne assumere come costante  $C$  la quantità:  $C = \frac{n_1 \lambda_1 l_1}{D_1}$ , la cui unità di misura è una lunghezza.  $C$  è infatti una costante legata al cammino ottico.

Le due nuove equazioni differenziali di  $\tilde{\Phi}$  in coordinate ridotte sono:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} \quad (6.6)$$



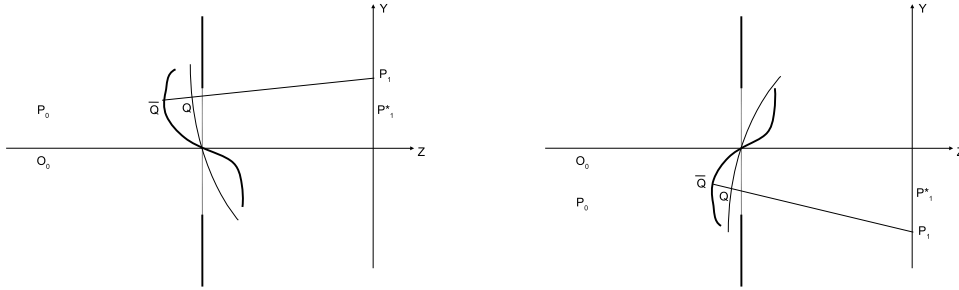


Figura 6.12:

Immaginiamo ora di effettuare una trasformazione di simmetria che riguardi  $P_0 \equiv P_0(X_0, Y_0, 0)$ ,  $P'_1 \equiv P'_1(X'_1, Y'_1, D_1)$ ,  $\tilde{\Phi} > 0$  e  $Y_1 - Y_1^* > 0$ :

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow -X_0 \\ Y_0 &\rightarrow -Y_0 \\ X'_1 &\rightarrow -X'_1 \\ Y'_1 &\rightarrow -Y'_1 \end{aligned}$$

Si ottiene che  $Y_1 - Y_1^* < 0$ , ma  $\tilde{\Phi} > 0$ .

Se  $P_0$  è fisso  $\tilde{\Phi}$  non deve variare per una rotazione rigida di un angolo  $\vartheta$  degli assi  $(x_0, y_0)$  e  $(\xi_1, \eta_1)$ . Infatti  $\tilde{\Phi}$  è una differenza di cammino e non dipende dalla descrizione fatta dal sistema di riferimento. Quindi  $\tilde{\Phi}$  deve essere una funzione di combinazioni di  $x_0, y_0, \xi_1$  e  $\eta_1$  invarianti per rotazione e si può dimostrare che con 4 variabili si possono costruire 3 invarianti:

$$e_1 = x_0^2 + y_0^2 \quad e_2 = x_0\xi_1 + y_0\eta_1 \quad e_3 = \xi_1^2 + \eta_1^2$$

per cui,  $\tilde{\Phi} \equiv \tilde{\Phi}(e_1, e_2, e_3)$ .

Mostriamo a titolo di esempio, che  $x_0^2 + y_0^2$  è un invariante per rotazione (Fig. 6.13).

$$x_0 = x'_0 \cos \vartheta - y'_0 \sin \vartheta$$

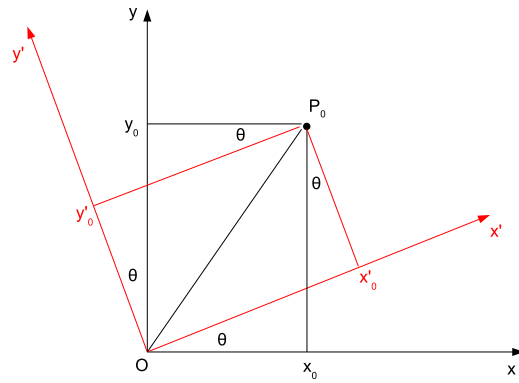


Figura 6.13:

$$y_0 = x'_0 \sin \vartheta + y'_0 \cos \vartheta$$

Da cui:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= x_0'^2 \cos^2 \vartheta + y_0'^2 \sin^2 \vartheta - 2x_0' y_0' \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &+ x_0'^2 \sin^2 \vartheta + y_0'^2 \cos^2 \vartheta + 2x_0' y_0' \sin \vartheta \cos \vartheta = x_0'^2 + y_0'^2 \end{aligned}$$

Ritorniamo alla funzione di aberrazione e applichiamo un'espansione in serie di MacLaurin:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong & A_0 + (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) + \frac{1}{2}(A_{111} e_1^2 + 2A_{12} e_1 e_2 + 2A_{13} e_1 e_3 + A_{22} e_2^2 + 2A_{23} e_2 e_3 + A_{33} e_3^2) + \\ & + \frac{1}{6}(A_{1111} e_1^3 + 3A_{122} e_1 e_2^2 + \dots) + \dots\end{aligned}$$

Lungo l'asse ottico l'aberrazione d'onda è nulla:  $\tilde{\Phi} = 0 \Rightarrow e_1 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow A_0 = 0$ . In approssimazione di Gauss, l'aberrazione del raggio è nulla e quindi:

$$\begin{aligned}x_1 - x_0 \cong & -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -A_2 x_0 - 2A_3 \xi_1 = 0 \\ y_1 - y_0 \cong & -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -A_2 y_0 - 2A_3 \eta_1 = 0\end{aligned}$$

Poiché queste equazioni devono valere per qualsiasi combinazione di  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\xi_1$  e  $\eta_1$ , la soluzione deve essere:  $A_2 = 0$  e  $A_3 = 0$ .

Se vogliamo migliorare l'approssimazione di Gauss occorre salire di ordine: Gauss  $\Rightarrow \sin \gamma \cong \gamma$ , Seidel  $\Rightarrow \gamma - \frac{\gamma^3}{3!}$ .

Inoltre,  $A_1, A_{11}$ , etc. si possono trascurare perché sono costanti quando si deriva rispetto a  $\xi_1$  e  $\eta_1$ . Si ottiene quindi:  $\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} + \tilde{\Phi}^{(6)} + \dots$ , dove (4) e (6) indicano termini di 4° e 6° grado nelle coordinate.

Se ci limitiamo a  $\tilde{\Phi}^{(4)}$  otteniamo le **5 aberrazioni primarie di Seidel**. A meno di una costante avremo:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= A_{12} e_1 e_2 + A_{13} e_1 e_3 + \frac{1}{2} A_{22} e_2^2 + A_{23} e_2 e_3 + \frac{1}{2} A_{33} e_3^2 \\ \tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= E e_1 e_2 - \frac{1}{2} D e_1 e_3 - C e_2^2 + F e_2 e_3 - \frac{1}{4} B e_3^2\end{aligned}\quad (6.7)$$

dove  $B, C, D, E, F$  sono i coefficienti di aberrazione sferica, astigmatismo, curvatura di campo, distorsione e coma.

## 6.4 Le 5 aberrazioni primarie di Seidel

### 6.4.1 Aberrazione sferica

Supponiamo che  $B \neq 0$ , mentre  $C = D = E = F = 0$ .

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}Bc_3^2 = -\frac{1}{4}B(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2$$

Derivando rispetto a  $\xi_1$  e  $\eta_1$ :

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}B 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)2\xi_1 = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

Eseguiamo una trasformazione in coordinate polari  $(\rho, \vartheta)$  sul piano della pupilla di uscita (Fig. 6.14):  $\xi_1 = \rho \sin \vartheta$  e  $\eta_1 = \rho \cos \vartheta$ , con  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .

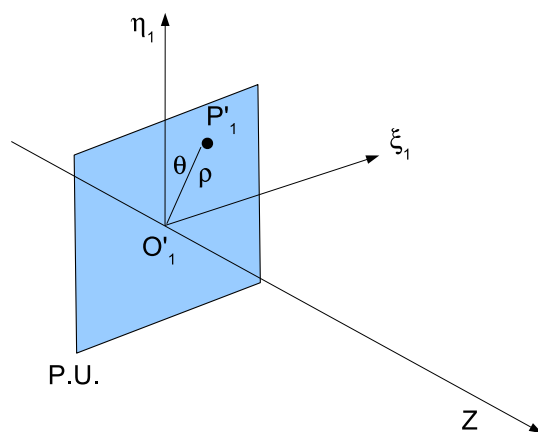


Figura 6.14:

$$x_1 - x_0 = B\rho \sin\vartheta(\rho^2 \sin^2\vartheta + \rho^2 \cos^2\vartheta) = B\rho^3 \sin\vartheta$$

$$y_1 - y_0 = B\rho^3 \cos\vartheta$$

Da cui si deduce che fissato  $\rho$ , al variare di  $\vartheta$  sul piano di Gauss viene descritta una circonferenza di centro  $(x_0, y_0)$  e di raggio  $B\rho^3$ .

Per semplicità poniamo  $x_0 = 0$ . Il vettore  $P_1^*P_1$  (Fig. 6.15) ruota la variare di  $\vartheta$ . La sua lunghezza è  $B\rho^3$  e quindi aumenta al crescere di  $\rho$ .

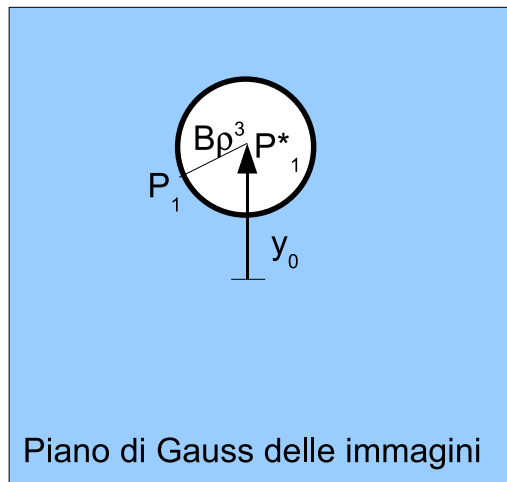


Figura 6.15:

Se adesso consideriamo tutti i raggi uscenti dalla pupilla di uscita e poniamo che  $0 < \rho < \rho_{max}$ , dove  $\rho_{max}$  è la massima apertura del fascio di raggi, osserviamo che l'immagine della sorgente puntiforme  $P_0$  è un disco di raggio  $B\rho_{max}$ .

La dimensione del disco non dipende da  $y_0$ , e questo significa che non serve eliminare il fuori-asse per far sparire l'aberrazione di sfericità; dipende invece da  $\rho_{max}^3$ , cioè è necessario diminuire l'apertura del fascio. Infine, corrisponde all'aberrazione sferica trasversa,  $t = 2c \frac{R^3}{f^2}$ .

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4} B e_3^2 = -\frac{1}{4} B (\rho^2 \sin^2\vartheta + \rho^2 \cos^2\vartheta)^2 = -\frac{1}{4} B \rho^4$$

La seguente figura (Fig. 6.16) mostra l'andamento della funzione di aberrazione. Quando si considerano raggi parassiali, la funzione è appiattita attorno allo zero, mentre all'aumentare della distanza dall'asse, l'aberrazione sferica cresce rapidamente.

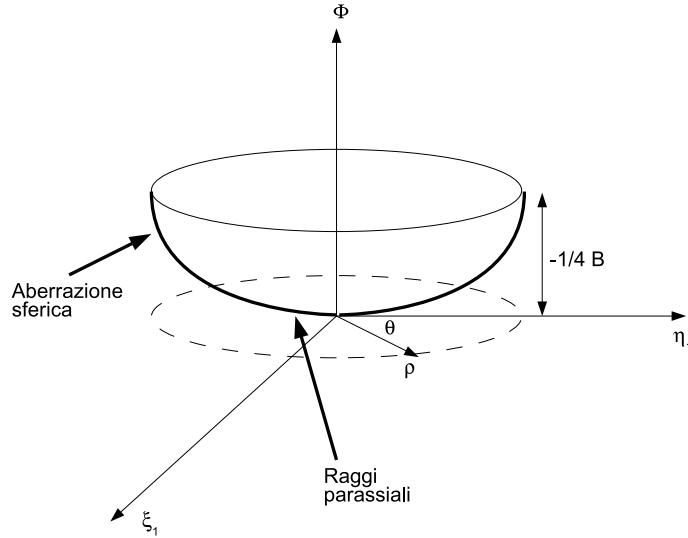


Figura 6.16:

### 6.4.2 Aberrazione di distorsione

Sia ora  $E \neq 0$ , mentre  $B = C = D = F = 0$ .

La funzione di aberrazione diventa:  $\tilde{\Phi} = E(x_0^2 + y_0^2)(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)$ .

Da cui:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -E(x_0^2 + y_0^2)x_0 = -E|OP_0|^2 x_0$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -E|OP_0|^2 y_0$$

Come si nota dalla Fig. 6.17, l'aberrazione del raggio sul piano delle immagini corrisponde al segmento  $P_1^*P_1 \equiv P_1^*P_1(-E|OP_0|^2 x_0, -E|OP_0|^2 y_0)$ . E inoltre  $\overline{P_1^*P_1} \parallel \overline{OP_0}$ . La distorsione non dipende da  $\vartheta$  perché non dipende né da  $\xi_1$  né da  $\eta_1$  e non fa perdere di stigmatismo al sistema.

$$P_1^*P_1 = \sqrt{[-E|OP_0|^2 x_0]^2 + [-E|OP_0|^2 y_0]^2} = E|OP_0|^2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = E|OP_0|^3$$

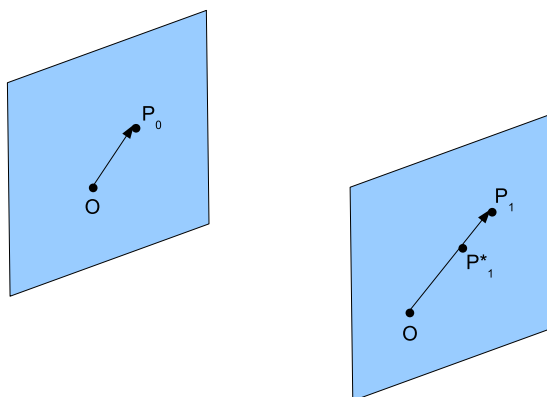


Figura 6.17:

Quindi la distorsione avviene nella stessa direzione del vettore  $\overrightarrow{OP_0}$  ma con verso concorde o discorde a seconda che  $E < 0$  o che  $E > 0$  rispettivamente. Il suo modulo aumenta con il cubo del fuori-asse (Fig. 6.18).

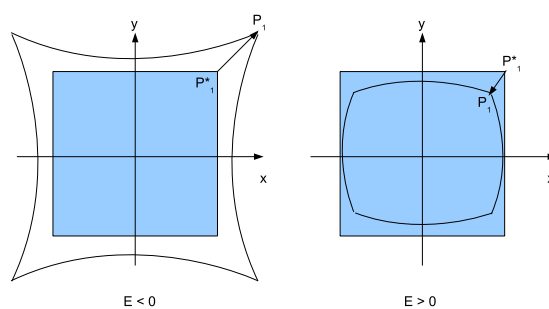


Figura 6.18:

### 6.4.3 Aberrazione di coma

Sia  $F \neq 0$ , mentre  $B = C = D = E = 0$ .

La funzione di aberrazione vale:  $\tilde{\Phi} = Fe_2e_3 = F(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)(\xi_1^2 + \eta_1^2)$ .  
Assumiamo per semplicità che  $x_0 = 0$ , e otteniamo:  $\tilde{\Phi} = Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$ . Ripetiamo i passaggi precedenti:

$$x_1 = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\xi_1} = -2Fy_0\eta_1\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\eta_1} = -Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

Passiamo in coordinate polari come prima:

$$x_1 = -2Fy_0\rho\sin\vartheta\rho\cos\vartheta = -Fy_0\rho^2\sin 2\vartheta$$

$$y_1 = y_0 - 2Fy_0\rho^2\cos^2\vartheta - Fy_0(\rho^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta) = y_0 - 2Fy_0\rho^2\cos^2\vartheta - Fy_0\rho^2 =$$

$$= y_0 - Fy_0\rho^2(2\cos^2\vartheta + 1) = y_0 - Fy_0\rho^2(\cos 2\vartheta + 2) = y_0 - 2Fy_0\rho^2 - Fy_0\rho^2\cos 2\vartheta$$

Queste due espressioni indicano che a causa dell'aberrazione di coma i raggi uscenti da mezza pupilla formano sul piano di Gauss una circonferenza di raggio  $Fy_0\rho^2$  e di centro spostato rispetto a  $P_1^*$  della quantità  $2Fy_0\rho^2$  (con  $F < 0$ ) (Fig. 6.19).

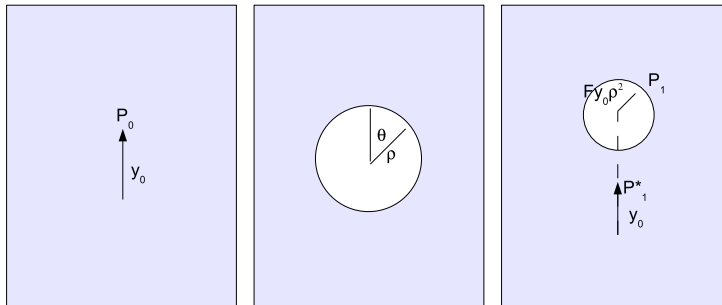


Figura 6.19:



Al diminuire del valore di  $\rho$  non solo si formano circonferenze di raggio minore, ma il loro centri si spostano verso  $P_1^*$ . È facile mostrare che si forma un'immagine circolare che si assottiglia fino a diventare a punta in corrispondenza di  $P_1^*$ , e l'angolo di apertura è di  $60^\circ$  (Fig. 6.20). Basta infatti tracciare da  $P_1^*$  le due tangenti a una circonferenza qualsiasi di raggio  $\rho$  e si ottiene:

$$\frac{F y_0 \rho^2}{2 F y_0 \rho^2} = \frac{1}{2} = \sin \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

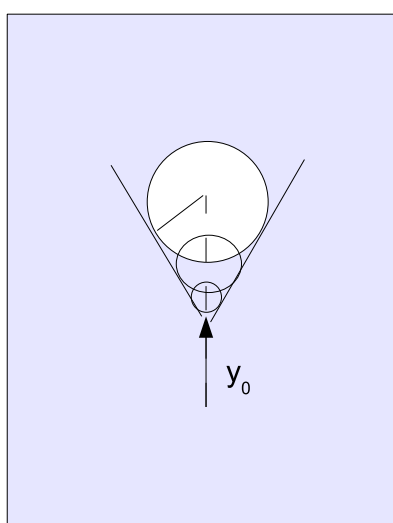


Figura 6.20:

Quindi a causa dell'aberrazione di coma l'immagine di una sorgente puntiforme è una figura allungata, tondeggiante da un lato e appuntita dall'altro, e con la punta rivolta verso l'asse ottico. Dipende sia dal fuori-asse che dal quadrato dell'apertura del fascio luminoso.

#### 6.4.4 Aberrazioni di astigmatismo e curvatura di campo

Siano  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$ , mentre  $B = E = F = 0$ .

Il termine che riguarda l'astigmatismo è  $-C e_2^2$ , mentre quello della curvatura di campo è  $-\frac{1}{2} D e_1 e_3$ .

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}De_1e_3 - Ce_2^2 = -\frac{1}{2}D(x_0^2 + y_0^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) - C(x_0\xi + y_0\eta)^2$$

Assumiamo anche in questo caso  $x_0 = 0$ , si ottiene:  $\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - Cy_0^2\eta_1^2$ .  
Le equazioni diventano:

$$x_1 = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\xi_1} = Dy_0^2\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\eta_1} = Dy_0^2\eta_1 + 2Cy_0^2\eta_1 = y_0^2\eta_1(2C + D)$$

Effettuiamo il cambio in coordinate polari:

$$x_1 = Dy_0^2\rho\sin\vartheta$$

$$y_1 = y_0 + (2C + D)y_0^2\rho\cos\vartheta$$

Sul piano di Gauss la figura descritta da queste equazioni è un'ellisse di semiassi  $Dy_0^2\rho$  e  $(2C + D)y_0^2\rho$ . Al crescere di  $y_0$ , cresce anche l'ellisse.

Quando  $D = 0$  si ha l'astigmatismo sagittale descritto da  $x_1 = 0$  e  $y_1 = y_0 + 2y_0^2C\rho\cos\vartheta$ , mentre quando  $2C + D = 0$  si l'astigmatismo tangenziale descritto da  $x_1 = Dy_0^2\rho\sin\vartheta$  e  $y_1 = y_0$  (Fig. 6.21).

#### 6.4.5 Riassunto

Riassumiamo qui le dipendenze delle varie aberrazioni. Abbiamo chiamato con  $y_0$  il fuori-asse e con  $\rho_{max}$  la massima apertura della pupilla di uscita. Mentre l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo fanno perdere di stigmatismo al sistema, la distorsione e la curvatura di campo spostano semplicemente il punto-immagine.

Sferica	→	∝	$\rho_{max}^3$
Coma	→	∝	$\rho_{max}^2 y_0$
Ast.+Curv.	→	∝	$\rho_{max} y_0^2$
Distorsione	→	∝	$y_0^3$

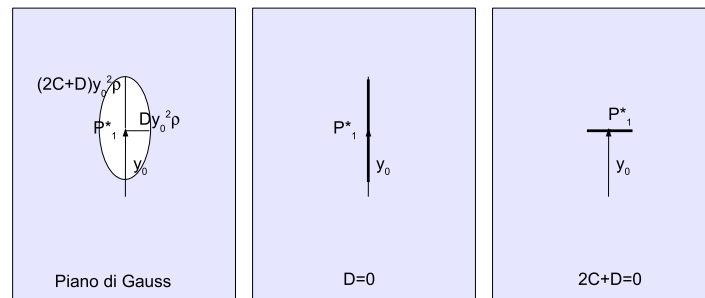


Figura 6.21:

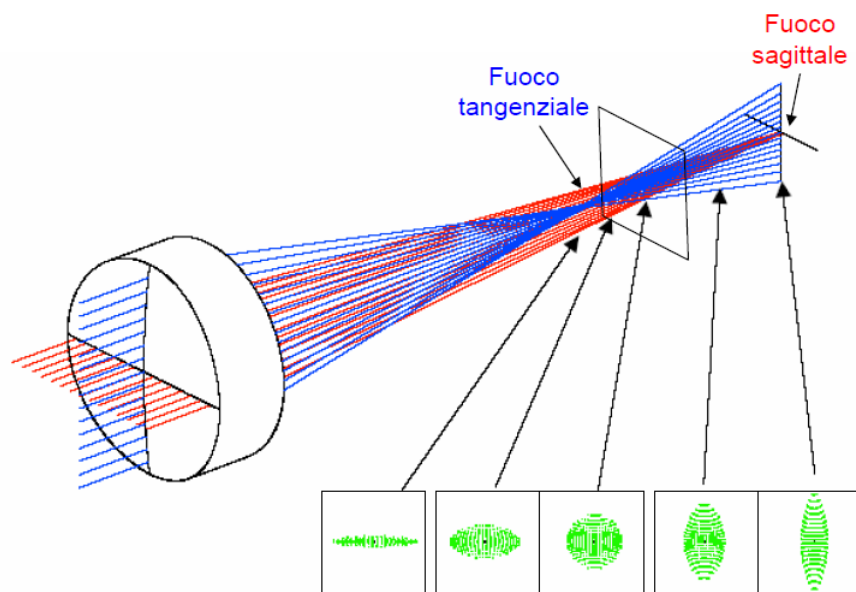


Figura 6.22:

