

Capitolo 5

Le aberrazioni

5.1 Aberrazione sferica

In approssimazione di Gauss, i raggi parassiali prodotti da una sorgente puntiforme posta sull'asse di un sistema ottico vanno a incontrarsi in un punto-immagine posto anch'esso sull'asse (Fig. 5.1).

In generale questo non avviene, cioè i raggi si incontrano in punti diversi dell'asse a seconda della loro distanza dall'asse stesso.

Riprendiamo la trattazione del diottro.

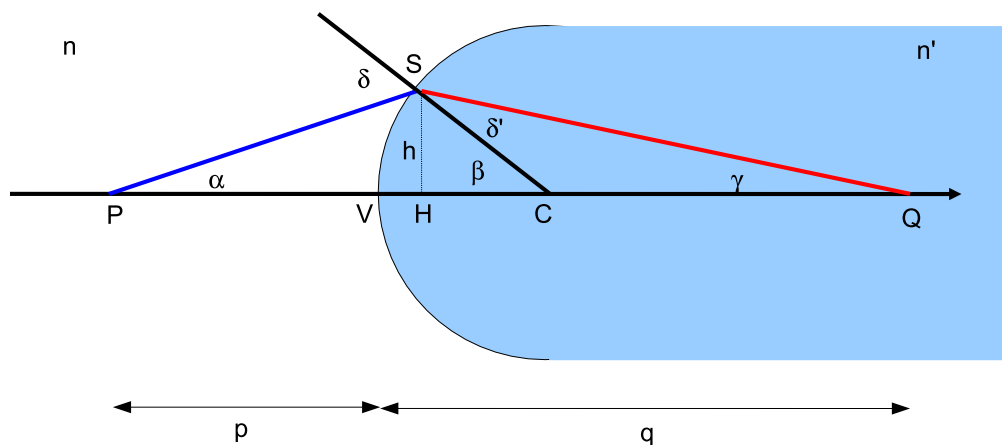


Figura 5.1:

Consideriamo i triangoli PSC e QSC . Applichiamo il teorema dei seni e la legge di Snell:

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin (\pi - \delta)}{p + R} = \frac{\sin \delta}{p + R}$$

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} = \frac{\sin \gamma}{R}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \delta'} = \frac{n'}{n}$$

Dividendo le prime due equazioni si ottiene:

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} \cdot \frac{p + R}{\sin \delta} = \frac{\sin \gamma}{R} \cdot \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$\frac{p + R}{q - R} = \frac{\sin \gamma n'}{\sin \alpha n} = \frac{n' \overline{PS}}{n \overline{QS}}$$

Utilizziamo ora il teorema dei coseni:

$$\overline{PS}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{SC}^2 - 2\overline{PC} \cdot \overline{SC} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{PS}^2 = (p + R)^2 + R^2 - 2(p + R) \cdot R \cdot \cos \beta$$

$$\overline{QS}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{SC} \cdot \overline{CQ} \cdot \cos (\pi - \beta)$$

$$\overline{QS}^2 = R^2 + (q - R)^2 + 2R \cdot (q - R) \cdot \cos \beta$$

Se adesso β non è molto grande, possiamo esprimere $\cos \beta$ in serie:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

e approssimare β alla sua tangente:

$$\tan \beta \cong \beta = \frac{h}{R}$$

da cui:

$$\overline{PS} = \sqrt{(p+R)^2 + R^2 - 2(p+R) \cdot R \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{p^2 + (p+R) \frac{h^2}{R}}$$

$$\overline{QS} = \sqrt{R^2 + (q-R)^2 + 2R \cdot (q-R) \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{q^2 + (R-q) \frac{h^2}{R}}$$

A questo punto abbiamo che:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n' \sqrt{p^2 + (p+R) \frac{h^2}{R}}}{n \sqrt{q^2 + (R-q) \frac{h^2}{R}}} = \frac{n' p \sqrt{1 + (p+R) \frac{h^2}{p^2 R}}}{n q \sqrt{1 + (R-q) \frac{h^2}{q^2 R}}}$$

Espandiamo in serie i due termini sotto radice quadrata, ricordando che: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n' p}{n q} \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2p}}{1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2q}} \right]$$

Adesso, applicando la definizione di fuoco secondario del diottro sferico:

$$f = \frac{n'R}{n' - n}$$

si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2fn'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' - n}{np} \right) \right] \quad (5.1)$$

Tenendo conto che gli indici di rifrazione, il raggio di curvatura e la focale sono costanti, una volta posizionata la sorgente a distanza p dal vertice, l'immagine si formerà a distanza $q(h)$.

Consideriamo un fascio di raggi uscente da una sorgente puntiforme e vediamo che tipo di immagine si forma. Già sappiamo che per effetto della **diffrazione**, l'immagine di una sorgente puntiforme non è mai un punto geometrico, bensì una figura di estensione finita, chiamata generalmente **centrica**, e formata da una zona centrale luminosa attornata da anelli chiari e scuri con intensità decrescente allontanandosi dal centro (**disco di Airy**).

L'aberrazione di **sfericità** è causata dal fatto che raggi a distanze diverse dall'asse ottico vanno a incontrarsi in punti diversi lungo l'asse stesso. In particolare, si ha aberrazione sferica **longitudinale** e **trasversale**, e nello spazio la composizione di queste due produce una figura chiamata **caustica** (Fig. 5.2). L'aberrazione sferica è l'unica delle aberrazioni monocromatiche che dipende solo dall'apertura.

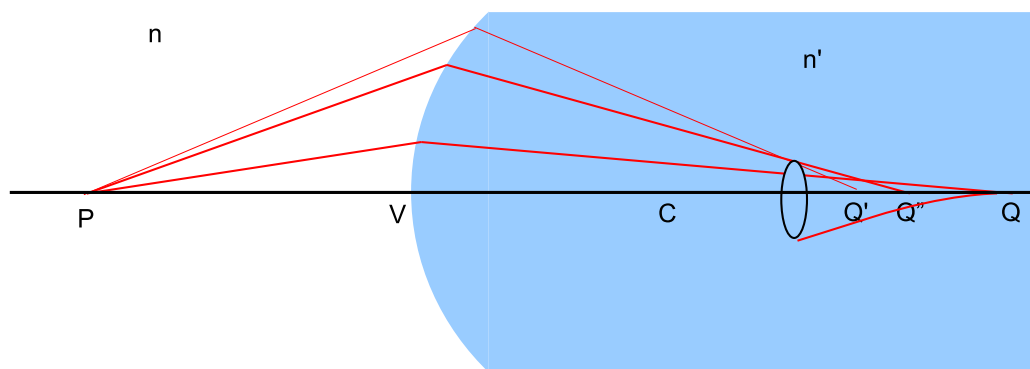


Figura 5.2:

Se h è la distanza del punto di incidenza del raggio sul diotro rispetto all'asse ottico e f_p il fuoco secondario del diotro nell'approssimazione di Gauss, abbiamo:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' - n}{np} \right) \right] \quad (5.2)$$

Poniamo adesso la sorgente luminosa all'infinito ($p \rightarrow \infty$). Un raggio marginale, a distanza h dall'asse ottico, si focalizza a distanza $f'(h) \neq f_p$.

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \frac{1}{R^2} \frac{1}{R} \right] \quad (5.3)$$

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n'}{f_p} + \frac{h^2 n^2}{2 f_p n' R^2} \quad (5.4)$$

Da cui si ottiene l'equazione:

$$f'(h) = \frac{f_p}{1 + \frac{n^2}{2 n'^2 R^2} h^2} \quad (5.5)$$

che indica che la distanza focale decresce al crescere della distanza dei raggi marginali dall'asse stesso.

Mettiamoci adesso nella condizione più semplice da trattare, cioè quella dello specchio sferico (Fig. 5.3).

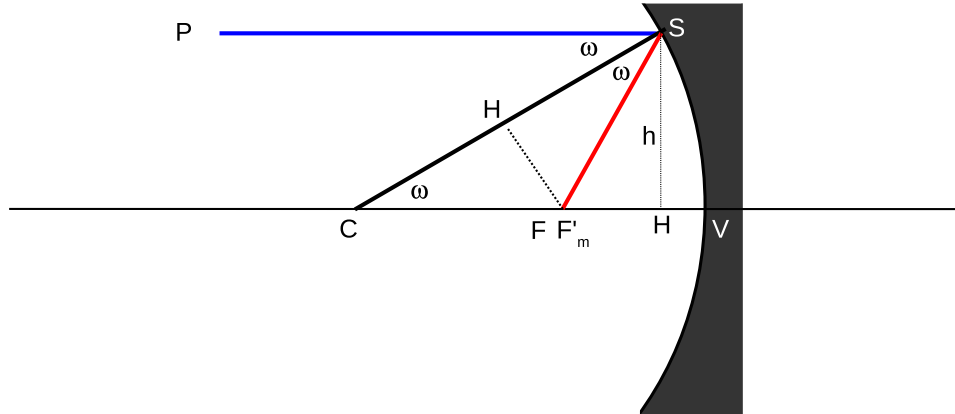


Figura 5.3:

$P\hat{S}C = C\hat{S}F'_m = S\hat{C}V = \omega$, per cui il triangolo CSF'_m è isoscele. Tracciamo la verticale da F'_m al raggio di curvatura CS , per cui $CH = HS = \frac{R}{2}$. Essendo CHF'_m un triangolo rettangolo, $CH < CF'_m$ e quindi $F'_mV = f' < \frac{R}{2}$. Quindi, in generale possiamo dire che $f' \neq \frac{R}{2}$ e in particolare $f' < \frac{R}{2}$.

Calcoliamo ora la distanza fra i due fuochi F , dato dall'approssimazione gaussiana, e F'_m .

$$\overline{FF'_m} = \overline{CF'_m} - \overline{CF} = \frac{\overline{CH}}{\cos \omega} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{\cos \omega} - 1 \right)$$

Espandiamo in serie il $\cos \omega$:

$$\cos \omega \cong 1 - \frac{\omega^2}{2}$$

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}} - 1 \right)$$

Moltiplicando e dividendo per $1 + \frac{\omega^2}{2}$ e trascurando i termini di grado superiore al secondo:

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{2} - 1 \right) = \frac{R\omega^2}{4}$$

Chiamiamo **aberrazione sferica longitudinale principale** (“principale” indica per convenzione che il punto-oggetto è all’infinito), la quantità:

$$l = \frac{f\omega^2}{2}$$

Esprimiamo l in funzione di h .

$$\sin \omega = \frac{h}{R} = \frac{h}{2f} \Rightarrow \omega = \arcsin \left(\frac{h}{2f} \right) \cong \frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3$$

$$l = \frac{f}{2} \left[\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3 \right]^2 \cong \frac{h^2}{8f} \quad (5.6)$$

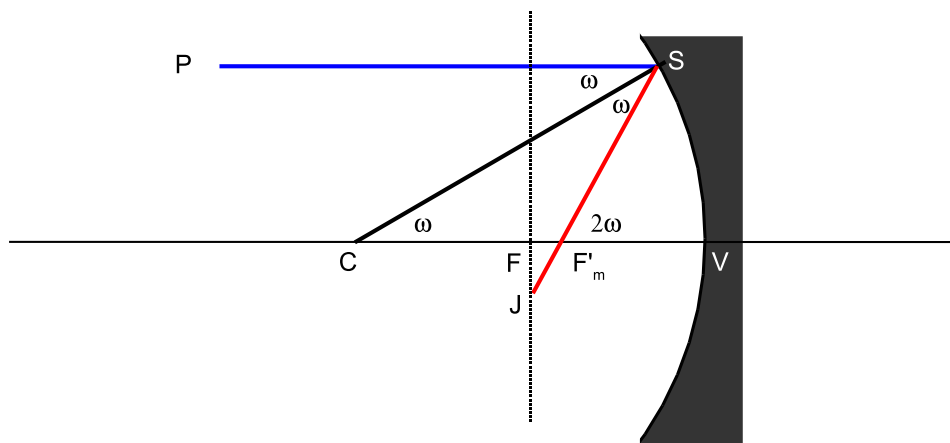


Figura 5.4:

Definiamo **aberrazione sferica trasversale principale** (Fig. 5.4), la quantità:

$$t = 2 \cdot \overline{FJ} = 2l \cdot \tan 2\omega$$

Espandiamo in serie la tangente, e otteniamo:

$$\overline{FJ} \cong l \left[2\omega + \frac{1}{3}(2\omega)^3 \right]$$

Sostituendo i valori di ω e di l trovati prima, si ha:

$$t = 2 \cdot \frac{h^2}{8f} \left[2 \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right)^3 \right]$$

E approssimando:

$$t \cong 2 \frac{h^2}{8f} \frac{2h}{2f} = \frac{h^3}{4f^2} \quad (5.7)$$

5.1.1 Esempio

Consideriamo uno specchio sferico di diametro $D = 100$ mm e lunghezza focale $f = 400$ mm. La dimensione sul piano focale dell'immagine di una sorgente puntiforme in assenza di aberrazioni è data dalla diffrazione:

$$d = 2 \cdot \frac{1.22\lambda}{D} \cdot f$$

Assumiamo $\lambda = 5500\text{\AA}$, e otteniamo $d \simeq 5.4\mu$.

Calcoliamo adesso l'aberrazione sferica longitudinale e trasversale per raggi a distanza $h = 10, 20, 30, 40$ mm dall'asse ottico della lente.

h (mm)	l (mm)	t (mm)
10	0.0312	0.0015
20	0.1250	0.0125
30	0.2812	0.0422
40	0.5000	0.1000

Come si vede, l'effetto dell'aberrazione sferica è sempre superiore a quello della diffrazione. E inoltre l'aberrazione sferica longitudinale è maggiore di quella trasversale. Infatti:

$$l > t \Rightarrow \frac{h^2}{8f} > \frac{h^3}{4f^2} \Rightarrow h < \frac{f}{2}$$

Poiché $h \leq \frac{D}{2}$ e sapendo che in genere le lenti hanno $f/D \geq 1$, si ottiene che $h < \frac{f}{2}$.

5.1.2 Aberrazione sferica nella lente sottile

L'espressione dell'aberrazione sferica longitudinale nel caso della lente sottile è più complicata di quella relativa allo specchio sferico. In particolare vale:

$$l = \frac{R^2 f^2 n - 1}{2 n^2} \left\{ \left[-\frac{1}{R_2} + (n+1)(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \left[-\frac{1}{R_2} + (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^2 + \frac{1}{R_1^3} \right\}$$

Il termine fra parentesi $\{ \}$ dipende dai raggi di curvatura della lente e dal suo indice di rifrazione. È dunque una quantità costante, quindi conviene scrivere:

$$l = c \frac{R^2}{f} \tag{5.8}$$

dove c è una costante adimensionale ($[L]^3 \cdot \{ [L]^{-1} \cdot [L]^{-2} + [L]^{-3} \}$).

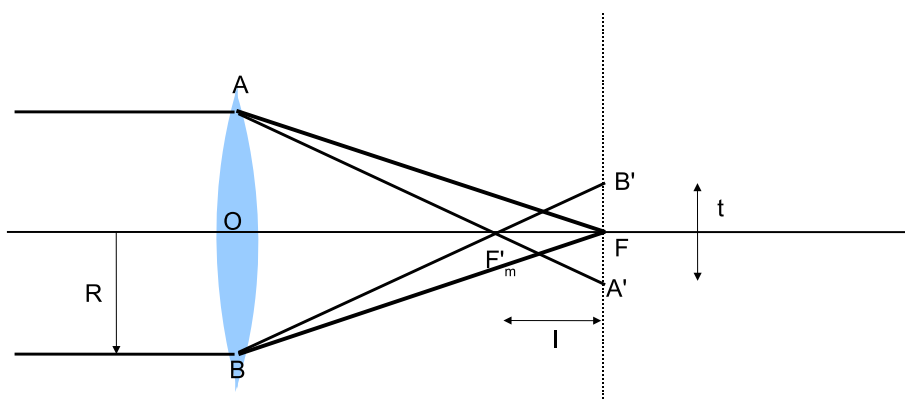


Figura 5.5:

Dalla Fig. 5.5 si ottiene:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'_m F}}{\overline{OF'_m}}$$

$$\frac{t}{2R} = \frac{l}{f'_m}$$

$$t = \frac{2Rl}{f'_m} \cong \frac{2Rl}{f} = 2c \frac{R^3}{f^2}$$

Dove f è il fuoco dei raggi parassiali $\frac{1}{f_p} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ e c è una costante che dipende dall'indice di rifrazione e dai raggi di curvatura, $c(n(\lambda), |R_1|, |R_2|)$.

Se chiamiamo h la distanza dall'asse ottico della lente, possiamo esprimere la posizione del fuoco al variare di h :

$$f(h) = f_p - c \frac{h^2}{f_p}$$

Definiamo ora, *fattore di forma* la quantità:

$$q = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}$$

da cui:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{q+1}{q-1}$$

È possibile minimizzare l'aberrazione sferica trovando il valore di q che minimizza la costante c :

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

Vediamo alcuni casi (Fig. 5.6) in cui assumiamo che l'indice di rifrazione valga $n = 1.5$:

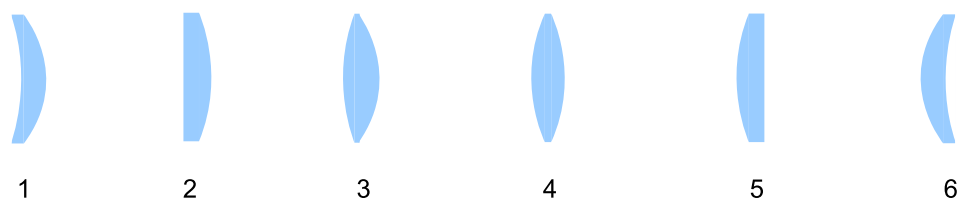


Figura 5.6:

- 1) $|R_1| > R_2$
Siano $R_1 = -10$ cm e $R_2 = -3.33$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -2$ e $c = 9.66$.
- 2) $|R_1| \rightarrow \text{inf}$
Sia $R_2 = -5.0$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q = -1$ e $c = 4.5$.
- 3) $|R_1| > R_2$
Siano $R_1 = 20$ cm e $R_2 = -6.66$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -0.5$ e $c = 2.79$.
- 4) $R_1 = |R_2|$
Siano $R_1 = 10$ cm e $R_2 = -10$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 0$ e $c = 1.7$.
- 5) $R_2 \rightarrow \text{inf}$
Sia $R_1 = 5.0$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 1$ e $c \cong 1.17$.
- 6) $|R_2| > R_1$
Siano $R_1 = 3.33$ cm e $R_2 = 10$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong 2$ e $c \cong 3$.

Se confrontiamo l'espressione per l'aberrazione sferica longitudinale e trasversa dello specchio sferico con quelle della lente sottile, abbiamo:

$$l = \frac{h^2}{8f} = c \frac{R^2}{f} \quad t = \frac{h^3}{4f^2} = 2c \frac{R^3}{f^2}$$

da cui, assumendo $R = h$ si ricava che $c = 1/8$.

Mentre per la lente sottile simmetrica, in cui $R_1 = |R_2| = R$ e $\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R}$, avremo:

$$c = \frac{f^3}{2} \frac{n-1}{n^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} + (n^2-1) \frac{2}{R} \right] \left[\frac{1}{R} + (n-1) \frac{2}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^3} \right\}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene la seguente relazione:

$$c = \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2} \quad (5.9)$$

Se assumiamo che $n = 1.5$, otteniamo $c \cong 1.7$.

5.2 Aberrazione cromatica

Riprendiamo il concetto di indice di rifrazione n . Come abbiamo visto nel Cap. 1, n è il rapporto fra la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo, e dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo. In particolare, per mezzi trasparenti come il vetro, si osserva che n decresce al crescere della lunghezza d'onda:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Questo implica che quando consideriamo una lente e un fascio di raggi che l'attraversano, l'effetto della rifrazione sui raggi dipenderà dall'indice di rifrazione. In particolare, verranno deviati maggiormente i raggi a lunghezza d'onda minore, rispetto a quelli a lunghezza d'onda maggiore. Questo meccanismo è alla base dell'effetto di **aberrazione cromatica** (Fig. 5.7).

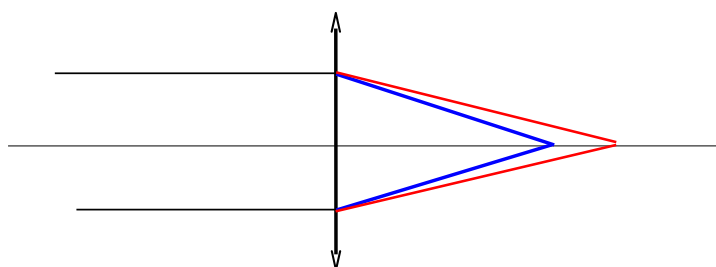


Figura 5.7:

Per studiare questa aberrazione abbiamo bisogno di un set di tre filtri interferenziali. I filtri sono sistemi ottici in grado di selezionare un certo intervallo di lunghezze d'onda, bloccando tutte le altre. In particolare i filtri interferenziali consentono di fare passare radiazione centrata ad una certa λ ma con un intervallo molto stretto (50 – 60 Å o meno).

Il set di filtri utilizzato è il seguente: $\lambda_F = 4861\text{Å}$ (riga $H\beta$ dell'idrogeno), $\lambda_D = 5892\text{Å}$ (doppietto del sodio), $\lambda_C = 6563\text{Å}$ (riga $H\alpha$ dell'idrogeno). Le lettere F, D, C corrispondono alla notazione di Fraunhofer. Più in generale si parla di filtro $H\alpha$, $H\beta$, ecc.

Dalla definizione di lunghezza focale della lente, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - 1 - n_C + 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n_F - n_C) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Per poter eliminare il termine contenente i raggi di curvatura utilizziamo il filtro D :

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f_D(n_D - 1)}$$

Da cui:

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

$$\frac{f_C - f_F}{f_F f_C} = \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

Definiamo quindi **aberrazione cromatica longitudinale (principale)** la quantità:

$$A = f_C - f_F = f(\lambda_C) - f(\lambda_F)$$

Chiamiamo **potere dispersivo** ω del materiale la quantità:

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

e **numero di Abbe** ν la quantità:

$$\nu = \frac{1}{\omega} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

I vetri ottici possono essere raggruppati in due grandi famiglie: 1) Crown, aventi $n \approx 1.5$ e $\nu \approx 60$ (basso potere dispersivo), 2) Flint, aventi $n \approx 1.6$ e $\nu \approx 30$ (alto potere dispersivo). Ad esempio, consideriamo un vetro Schott BK7 avente:

$$\begin{aligned} n_F &= 1.52238 \\ n_D &= 1.51680 & \Rightarrow & \omega = 0.0156 & \Rightarrow & \nu = 64 \\ n_C &= 1.51342 \end{aligned}$$

Dalla definizione di aberrazione cromatica otteniamo:

$$A = \frac{f_F f_C}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

Se assumiamo la seguente approssimazione: $f_F f_C \cong f_D^2$, abbiamo:

$$A \cong \omega f_D = \frac{f_D}{\nu}$$

Cerchiamo ora di comprendere il significato del numero di Abbe.

Ripartiamo dalla definizione di lunghezza focale della lente e differenziamo ambo i membri:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) n - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$-\frac{1}{f^2} df = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dn$$

$$\frac{df}{dn} = -f^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Assumendo $f = f_D$, cioè la focale corrispondente alla lunghezza d'onda del doppietto del sodio, come rappresentativa della focale della lente:

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

E poi approssimando: $dn \cong \Delta n = n_C - n_F$, $df \cong \Delta f$, si ottiene:

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = -f_D^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = -f_D \left[f_D \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{-f_D}{n_D - 1}$$

$$\frac{\Delta f}{f_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{\nu} = \omega$$

Essendo $\nu > 0$ per i vetri ottici, il numero di Abbe è inversamente proporzionale alla dispersione cromatica della lunghezza focale.

Vediamo adesso cosa accade quando la sorgente puntiforme non si trova all'infinito ma a distanza finita p . Ovviamente applichiamo la legge dei punti coniugati per calcolare l'effetto dell'aberrazione cromatica sulla misura di q .

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_F} = \frac{n_F - 1}{f_D(n_D - 1)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q_C} = \frac{n_C - 1}{f_D(n_D - 1)}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\frac{1}{q_F} - \frac{1}{q_C} = \frac{n_F - 1 - n_C + 1}{f_D(n_D - 1)} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f_D} = \frac{1}{\nu f_D}$$

$$\frac{q_C - q_F}{q_F q_C} = \frac{1}{\nu f_D} \Rightarrow q_C - q_F = \frac{q_F q_C}{\nu f_D}$$

Esplicitiamo q_F e q_C usando l'equazione dei punti coniugati:

$$q_F = \frac{1}{\left(\frac{n_F-1}{n_D-1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}} \quad q_C = \frac{1}{\left(\frac{n_C-1}{n_D-1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}}$$

Se approssimiamo $\left(\frac{n_C-1}{n_D-1}\right) \cong 1$, abbiamo:

$$q_C - q_F \cong \frac{1}{\nu f_D \left(\frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}\right)^2}$$

Sappiamo che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_D} = \frac{1}{f_D}$$

Quindi l'aberrazione cromatica $q_C - q_F$ vale:

$$q_C - q_F = \frac{q_D^2}{\nu f_D} = \frac{f_D}{\nu} \left(\frac{q_D}{f_D}\right)^2$$

Da questa relazione si ricava che:

- $q_C - q_F \propto q_D^2$;
- $q_D > f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} > 1$, cioè l'aberrazione cromatica cresce rapidamente con il crescere della distanza dell'immagine dalla lente;
- $q_D < f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} < 1$, cioè l'aberrazione cromatica decresce rapidamente con il decrescere della distanza dell'immagine dalla lente.

Come si nota dalla Fig. 5.8, possiamo definire anche l'**aberrazione cromatica trasversa** d .

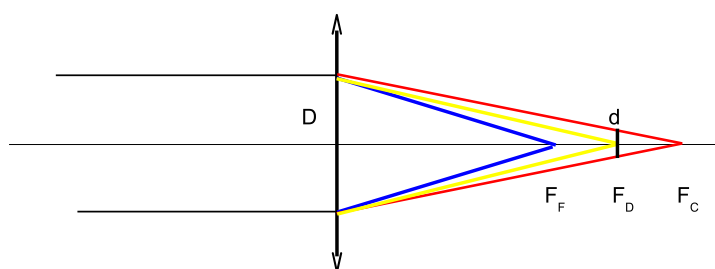


Figura 5.8:

$$\frac{d}{f_C - f_D} = \frac{D}{f_C}$$

Applicando le seguenti approssimazioni: $f_C \approx f_D$ e $f_C - f_D \approx \frac{f_C - f_F}{2}$, si ottiene:

$$\frac{d}{\frac{f_C - f_F}{2}} \cong \frac{D}{f_C}$$

da cui:

$$d = \frac{1}{2} \frac{f_C - f_F}{f_D} D \cong \frac{1}{2} \frac{D}{\nu}$$

5.2.1 Esempio

Consideriamo una lente in vetro Schott FK5, avente diametro $D = 50$ mm e lunghezza focale $F = 150$ mm.

Calcoliamo prima il diametro del disco di Airy alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500\text{\AA}$:

$$\phi = 2 \frac{1.22\lambda}{D} F = 4\mu$$

Supponiamo che la lente abbia i seguenti indici di rifrazione: $n_C = 1.48535$, $n_D = 1.48749$, $n_F = 1.49227$. Il valore del numero di Abbe sarà $\nu \cong 70$. Allora l'aberrazione cromatica longitudinale vale: $A = \frac{150}{70} \cong 2.15$ mm, mentre quella trasversa vale: $d = \frac{50}{2 \cdot 70} \cong 0.35$ mm.

5.2.2 Doppietto acromatico

È possibile combinare lenti con caratteristiche diverse per annullare l'aberrazione cromatica?

Sappiamo che addossando lenti sottili, il potere diottrico risultante è la somma dei poteri diottrici delle singole lenti:

$$D_{tot} = \sum_i D_i$$

Prendiamo due lenti con lunghezze focali f e f' , avremo:

$$\frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} \quad \frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\frac{1}{F_F} - \frac{1}{F_C} = \frac{F_C - F_F}{F_F F_C} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f_C} - \frac{1}{f'_C} = \left(\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} \right) + \left(\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} \right)$$

L'aberrazione cromatica del doppietto sarà $A_{tot} = F_C - F_F$, per cui:

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} = \frac{A}{f_F f_C} + \frac{A'}{f'_F f'_C}$$

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} \cong \frac{A}{f_D^2} + \frac{A'}{f'_D{}^2}$$

$$\frac{A_{tot}}{F_F F_C} = \frac{1}{\nu f_D} + \frac{1}{\nu' f'_D}$$

Imponiamo ora la condizione di acromatizzazione: $A_{tot} = 0$.

$$\nu f_D + \nu' f'_D = 0$$

Se $\nu = \nu'$, cioè se le due lenti hanno lo stesso potere dispersivo, la condizione implica che: $f_D = -f'_D$, cioè serve una lente convergente e una divergente. Purtroppo il potere diottrico di un tale doppietto è $D_{tot} = 0$, cioè la lente non ha nessun poter di convergenza.

Se invece $\nu \neq \nu'$, si ha: $\frac{1}{\nu f_D} = -\frac{1}{\nu' f_D}$. Poiché $\nu, \nu' > 0$, le focali delle due lenti hanno segni opposti.

È chiaro quindi che non basta semplicemente addossare una lente positiva a una negativa per avere un doppietto acromatico, bisogna essere certi che le due lenti siano composte di un materiale diverso.

Se ad esempio la lente convergente è un vetro Crown, il doppietto ha potere diottrico positivo quando $f < f'$, ed è acromatico quando $\nu > \nu'$, e quindi quando il vetro della lente divergente è un Flint.

5.2.3 Oculare acromatico

È possibile ottenere un sistema acromatico utilizzando due o più lenti spaziate?

Sappiamo che il potere diottrico risultante di due lenti sottili separate da una distanza d è:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Da cui, differenziando membro a membro:

$$\begin{aligned} -\frac{df}{f^2} &= \left(-\frac{1}{f_1^2} + \frac{d}{f_1^2 f_2} \right) df_1 + \left(-\frac{1}{f_2^2} + \frac{d}{f_1 f_2^2} \right) df_2 \\ -\frac{df}{f^2} &= -\frac{df_1}{f_1^2} \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) - \frac{df_2}{f_2^2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \end{aligned}$$

Facciamo la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1} &\approx \frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{1}{\nu_1} \\ \frac{df}{f^2} &\cong \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{f_1} \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) + \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Imponiamo adesso la condizione di acromatizzazione: $\frac{df}{f^2} = 0$,

$$\frac{f_2 - d + f_1 - d}{f_1 f_2} = 0$$

$$f_1 + f_2 - 2d = 0$$

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Quindi per avere un sistema acromatico bisogna che le due lenti siano separate di una distanza pari alla media delle due focali.

Infine:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{2f_1} - \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$$

