

## Capitolo 3

# Lenti

### 3.1 Lenti sottili

Indichiamo con il termine **lente** un sistema ottico costituito da materiale trasparente e omogeneo limitato da due superfici che possono essere entrambe sferiche oppure una piana ed una sferica (ma mai entrambe piane!), le quali separano un mezzo di indice di rifrazione  $n'$  da un mezzo di indice di rifrazione  $n$ .

Una lente si dice **sottile** quando si può assumere che il suo spessore sia piccolo in confronto alle lunghezze in gioco, come ad esempio i raggi di curvatura, le lunghezze focali e le distanze dell'immagine e dell'oggetto. In pratica, in termini di ottica geometrica, la lente si considera assimilata a un piano e si trascura ciò che avviene all'interno di essa quando è attraversata da raggi di luce.

Esistono due famiglie principali di lenti: **convergenti** e **divergenti**. E all'interno di esse abbiamo varie categorie come ad esempio la lente biconvessa, o biconcava, piano-convessa o piano-concava, menisco-convergente o menisco-divergente, ecc. (Fig. 3.1)

Consideriamo ora due diottri concavi addossati, che creano una sorta di lente spessa (chiamiamo  $d$  lo spessore della lente) avente indice di rifrazione  $n$  (Fig. 3.2). I due diottri abbiano raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$  diversi. Poniamo una sorgente luminosa in P e consideriamo un raggio che da P si propaga verso il primo diottro. Per effetto della rifrazione andrà a divergere e dovremo considerarne il prolungamento all'indietro fino al punto Q' sull'asse ottico. Il raggio prosegue dentro i due diottri e viene nuovamente rifratto, andando a incrociare l'asse ottico nel punto Q.

Impostiamo le equazioni dei due diottri, assumendo che  $p' = q + d$ :

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R_1}$$

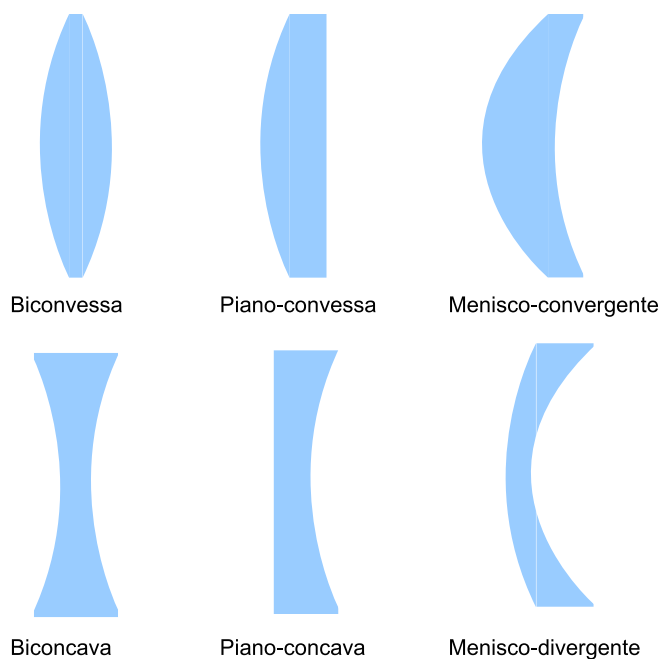


Figura 3.1:

$$\frac{n}{q+d} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Nell'approssimazione della lente sottile  $d \ll q$  e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Da cui, sommando membro a membro le due equazioni, otteniamo:

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2}$$

e infine:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.1)$$

Quindi, nel caso della lente sottile, ciò che avviene all'interno della lente si può trascurare.

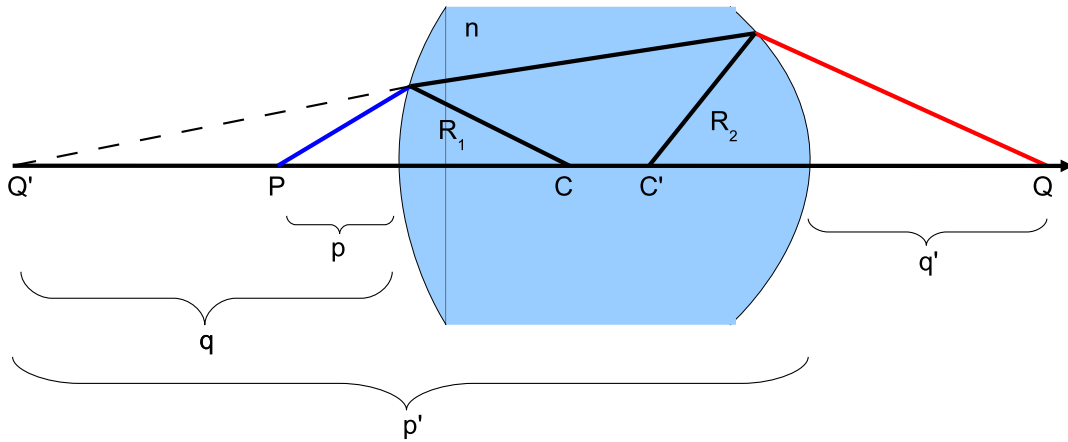


Figura 3.2:

Torniamo adesso alla vecchia notazione e indichiamo con  $p$  la distanza del punto-oggetto e con  $q$  la distanza del punto-immagine dalla lente. Immaginiamo di portare la sorgente all'infinito ( $p \rightarrow \infty$ ). I raggi paralleli e vicini all'asse ottico andranno a concentrarsi in un punto detto fuoco della lente.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Simmetricamente, se mettiamo la sorgente nel fuoco della lente, l'immagine si forma all'infinito. Come si può facilmente capire dalla formula, la distanza focale  $f$  è una sola per la lente sottile. Nel caso di una lente convergente non necessariamente simmetrica, avremo che  $R_1 > 0$  e  $R_2 < 0$ , per cui alla fine la lunghezza focale sarà positiva ( $f > 0$ ). Al contrario, per una lente divergente avremo che  $R_1 < 0$  e  $R_2 > 0$ , per cui sarà  $f < 0$ . Si noti inoltre che nella lente menisco-convergente entrambi i raggi sono positivi, ma  $R_2 > R_1$  per cui  $f > 0$ , mentre nella lente menisco-divergente sono ancora entrambi positivi, ma  $R_2 < R_1$  e quindi  $f < 0$ .

In definitiva possiamo scrivere che l'equazione dei punti coniugati (o **formula di Gauss**) per la lente sottile è la seguente:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}} \quad (3.2)$$

È possibile ottenere questo risultato seguendo un semplice ragionamento basato sulla similitudine dei triangoli (Fig. 3.3).

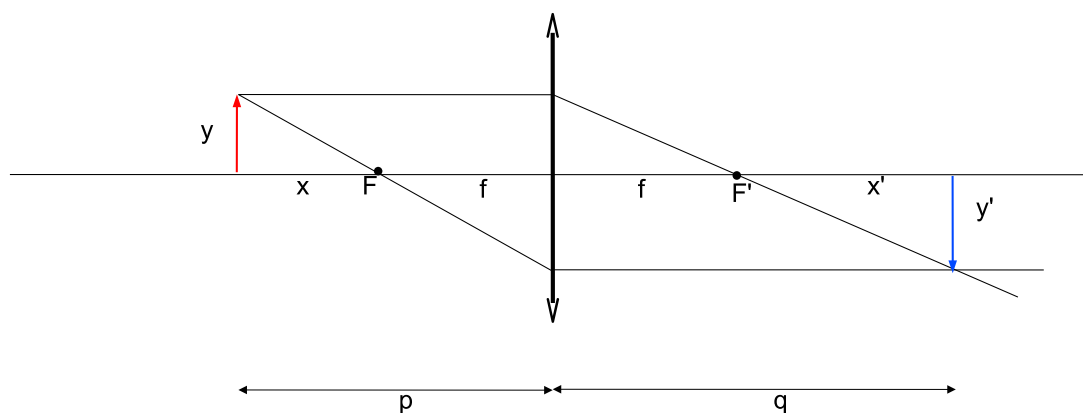


Figura 3.3:

$$\frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f}$$

$$\frac{y - y'}{p} = -\frac{y'}{f}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$\frac{y - y'}{p} + \frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f} - \frac{y'}{f}$$

da cui si riottiene la formula di Gauss:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

È possibile mettere in relazione la focale della lente non solo alle distanze di oggetto e immagine dalla lente stessa, ma anche alle distanze di oggetto e immagine dai fuochi:

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{-y'} \quad \frac{x'}{f} = \frac{-y'}{y}$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$\boxed{x \cdot x' = f^2} \quad (3.3)$$

nota come **formula di Newton**.

Definiamo ora l'**ingrandimento** di una lente sottile come il rapporto fra la dimensione dell'immagine e la dimensione dell'oggetto. Sempre dalla Fig. 3.3 e dalla similitudine fra triangoli possiamo scrivere:

$$\frac{-y'}{f} = \frac{y - y'}{f + x}$$

$$\frac{y}{f} = \frac{y - y'}{f + x'}$$

da cui, dividendo membro a membro, otteniamo:

$$m = \frac{-y'}{y} = \frac{f + x'}{f + x} = \frac{q}{p} \quad (3.4)$$

cioè l'ingrandimento è dato banalmente dal rapporto fra le distanze dei piani coniugati dal centro della lente.

Consideriamo l'equazione dei punti coniugati e scriviamola in una forma diversa:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{p + q}{pq} = \frac{1}{f}$$

$$p + q = \frac{pq}{f}$$

$$\frac{p}{q} + 1 = \frac{p}{f}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{p - f}{f}$$

E infine:

$$m = \frac{f}{p - f}$$

L'asintoto verticale si ha quando  $p = f$  (Fig. 3.4).

Per  $p > f$ , cioè ponendo l'oggetto a distanza dalla lente maggiore della distanza focale, l'ingrandimento è positivo,  $m > 0$ , e si forma un'immagine reale e capovolta dalla parte opposta rispetto alla lente. Quando invece  $p < f$ , cioè quando l'oggetto si trova fra il fuoco dalla lente e la lente stessa l'ingrandimento è negativo,  $m < 0$ , e si forma un'immagine virtuale dritta dalla stessa parte dell'oggetto.

Si ha ingrandimento pari a 1 quando:

$$p - f = f \Rightarrow p = 2f$$

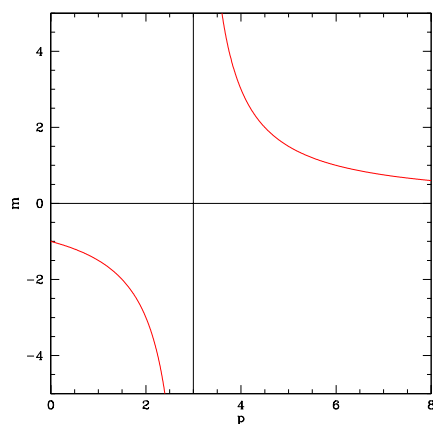


Figura 3.4:

Per cui, allontanare l'oggetto a distanze  $p > 2f$  significa produrre un'immagine reale che diventa via via sempre più piccola e che si avvicina alla lente. Quando invece l'oggetto si trova a distanze  $f < p < 2f$ , l'ingrandimento cresce. Quando l'oggetto si trova a distanze  $0 < p < f$ , l'immagine è dritta e sempre più grande dell'oggetto. Ma avvicinando l'oggetto alla lente, l'immagine tende a rimpicciolirsi fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto con la lente (Fig. 3.5).

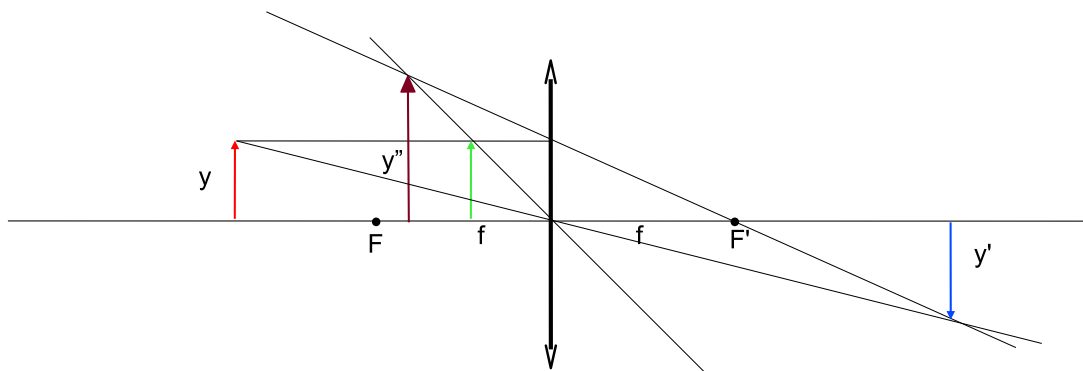


Figura 3.5:

Per confronto, si veda il caso della lente divergente, che produce sempre un'immagine dritta, virtuale, con ingrandimento minore di 1 e che si forma tra il fuoco e la lente dalla

parte dell'oggetto. Con l'avvicinarsi dell'oggetto alla lente, l'immagine si ingrandisce e si avvicina anch'essa alla lente fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto con la lente (Fig. 3.6).

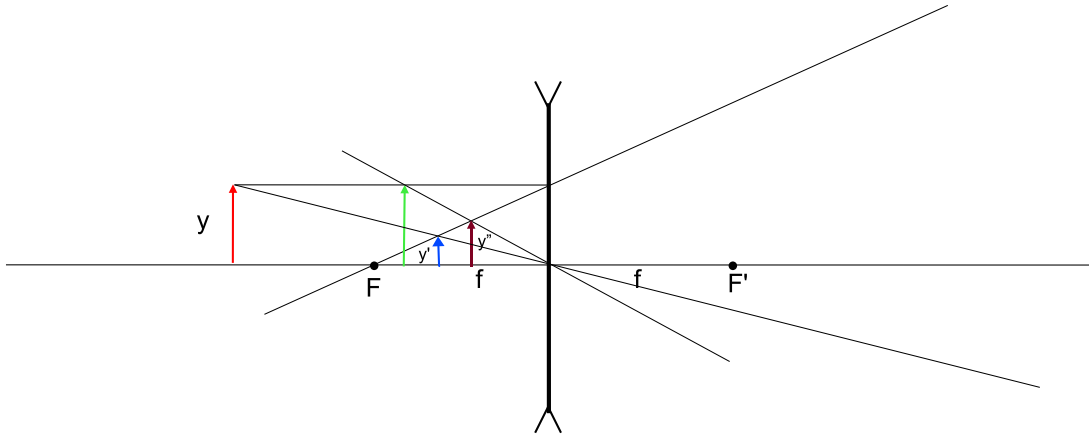


Figura 3.6:

Si definisce **potere diottrico** di una lente la quantità:

$$P = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5)$$

Viene misurato in diottrie se la distanza focale è espressa in metri.

Immaginiamo adesso un sistema fatto di due (o più lenti) sottili addossate. Poniamo una sorgente di luce all'infinito: i raggi paralleli che incidono sulla prima lente dovrebbero convergere nel fuoco secondario  $F'_1$  posto alla distanza  $f_1$ , ma incontrano la seconda lente. Il fuoco  $F'_1$  diventa l'oggetto virtuale per la seconda lente che ha distanza focale  $f_2$ . Il punto in cui si forma l'immagine finale è per definizione il fuoco secondario del sistema di due lenti, e la sua distanza dalle lenti,  $f$ , si calcola applicando la formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{-f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$$

da cui:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3.6)$$

O anche:

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.7)$$

Quindi, possiamo affermare che il potere diottrico di lenti sottili a contatto è dato dalla somma dei poteri diottrici delle singole lenti. Si tenga sempre a mente che queste equazioni sono valide solo per lenti sottili addossate. Nel caso in cui esse fossero distanziate di una quantità non trascurabile, il potere diottrico finale sarebbe dipendente dalla separazione. Nel caso, però, che il fascio emergente dalla prima lente sia parallelo all'asse ottico, l'effetto sulla seconda lente diventa indipendente dalla distanza fra le due lenti e tutto avviene come se fossero addossate.

Introduciamo infine il concetto di **profondità di campo**.

Immaginiamo una sorgente luminosa posta in P, la cui immagine è il punto Q. Spostiamo ora la sorgente di un tratto  $\overline{PP'} = \Delta p$ . L'immagine si sposterà della quantità  $\overline{QQ'} = \Delta q$  (Fig. 3.7). Come sono legati  $\Delta p$  e  $\Delta q$  ?

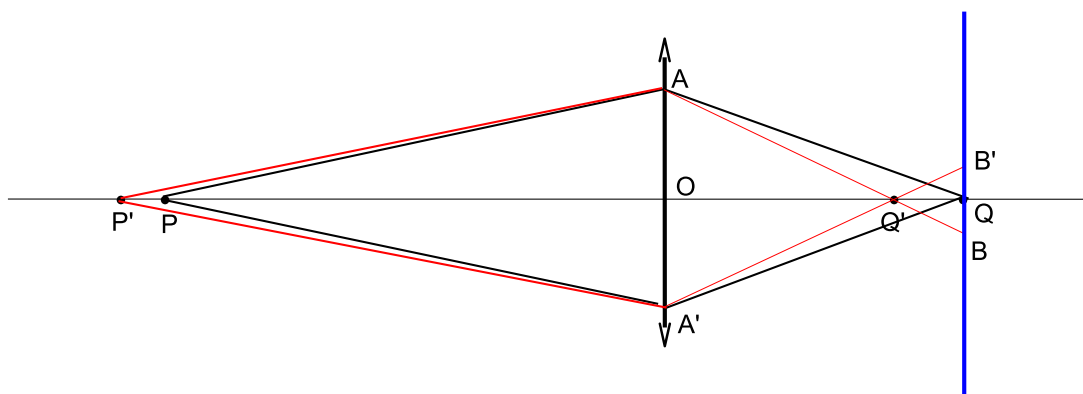


Figura 3.7:

Prendiamo la legge dei punti coniugati e differenziamo ambo i membri:

$$-\frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta q}{q^2} = 0$$

Se  $p \gg f$ , cioè se l'oggetto è molto lontano dalla lente, come accade per i telescopi e in



genere per le macchine fotografiche, possiamo assumere che  $q \cong f$ . Quindi:

$$\Delta p \cong -p^2 \frac{\Delta q}{f^2}$$

Se adesso  $\overline{AO} = h$  e  $\overline{B'Q} = \epsilon$ , per la similitudine fra i triangoli  $AQ'A'$  e  $BQ'B'$ , avremo:

$$\frac{\Delta q}{2\epsilon} \cong \frac{f}{2h}$$

ossia:

$$\Delta q \cong \epsilon \frac{f}{h}$$

Se adesso i dischetti di diametro non superiore a  $2\epsilon$  possono essere considerati in prima approssimazione immagini puntiformi, segue che tutti i punti-oggetto compresi fra  $p - \Delta p$  e  $p + \Delta p$ , con

$$|\Delta p| \cong \frac{p^2}{f^2} \epsilon \frac{f}{h} = \epsilon \frac{p^2}{hf}$$

avranno un'immagine nitida e puntiforme.

La quantità  $2\Delta p$  si chiama **profondità di campo**, per oggetti a distanza  $p$  e sotto l'apertura  $h$ .

Come si può notare, se teniamo costanti  $\epsilon$  e  $f$ , sia  $\Delta p$  che  $\Delta q$ , crescono al decrescere di  $h$ . Quindi la profondità di campo aumenta quando si passa da raggi marginali a raggi parassiali. Inoltre, se teniamo costanti  $\epsilon$  e  $h$ ,  $\Delta p$  cresce al decrescere della lunghezza focale. Le macchine fotografiche a fuoco fisso hanno in genere focale corta e piccola apertura, in modo da avere grande profondità di campo.

## 3.2 Lenti spesse

Nel caso in cui non possiamo considerare lo spessore della lente trascurabile, le formule fin qui utilizzate non sono direttamente applicabili. Ciò nonostante, è possibile trattare il caso delle lenti spesse in modo relativamente semplice, utilizzando i cosiddetti **piani principali**, che possono essere definiti come quei due piani coniugati per cui l'ingrandimento vale +1.

Consideriamo una lente spessa, biconcava e asimmetrica. Poniamo una sorgente di luce nel fuoco primario  $F_1$ , dalla parte opposta della lente emergerà un fascio di raggi paralleli. Vediamo cosa avviene all'interno della lente: i raggi provenienti dal fuoco raggiungono la prima superficie e subiscono una rifrazione, poi raggiungono la seconda

superficie e subiscono una seconda rifrazione. Prolunghiamo i raggi incidenti e i raggi emergenti dentro la lente e otteniamo così il primo piano principale  $H_1$ . Ripetiamo la procedura per il fuoco secondario  $F_2$  e otteniamo il secondo piano principale  $H_2$  (Fig. 3.8).

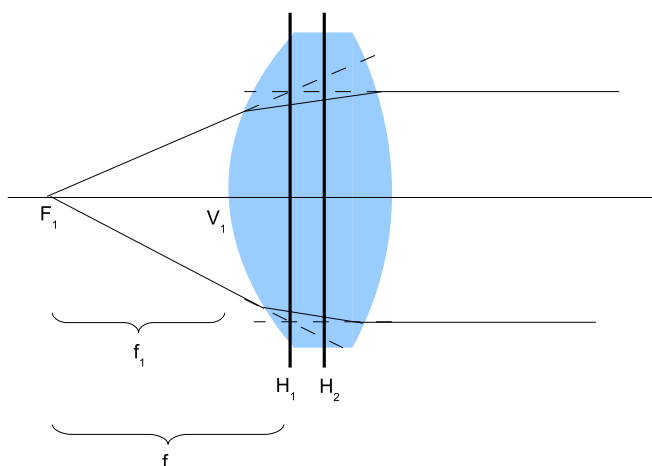


Figura 3.8:

Le intersezioni di questi piani con l'asse ottico della lente definiscono i **punti principali**. I raggi tra i piani principali si propagano paralleli all'asse ottico, e quindi una volta definita la loro posizione è possibile utilizzarli al posto della lente spessa, per esempio per costruire l'immagine esattamente come nel caso di una lente sottile (Fig. 3.9).

Si faccia attenzione che indichiamo con  $f_1$  ed  $f_2$  le **distanze focali**, misurate dai vertici  $V_1$  e  $V_2$  della lente ai rispettivi fuochi  $F_1$  e  $F_2$ , mentre  $f$  è la **lunghezza focale** della lente, misurata dai piani principali. In una lente spessa in generale  $f_1 \neq f_2 \neq f$ .

In una lente sottile al contrario non c'è distinzione fra queste due quantità, i piani principali coincidono fra di loro i punti principali coincidono con il centro della lente e con i vertici delle calotte.

Determiniamo ora la lunghezza focale  $f$  di una lente spessa avente spessore  $d$  e indice di rifrazione  $n$ .

Chiamiamo  $d$  la distanza fra i vertici  $V_1$  e  $V_2$  della lente e consideriamo la lente spessa come il risultato di due diottri addossati. Ogni diottro avrà due distanze focali:  $f_{11}$  e  $f_{12}$  siano le distanze focali del primo diottro, e  $f_{21}$  e  $f_{22}$  le distanze focali del secondo diottro (Fig. 3.10).

Immaginiamo che la luce provenga da sinistra e dall'infinito ( $p \rightarrow \infty$ ). Scriviamo l'equazione del primo diottro:

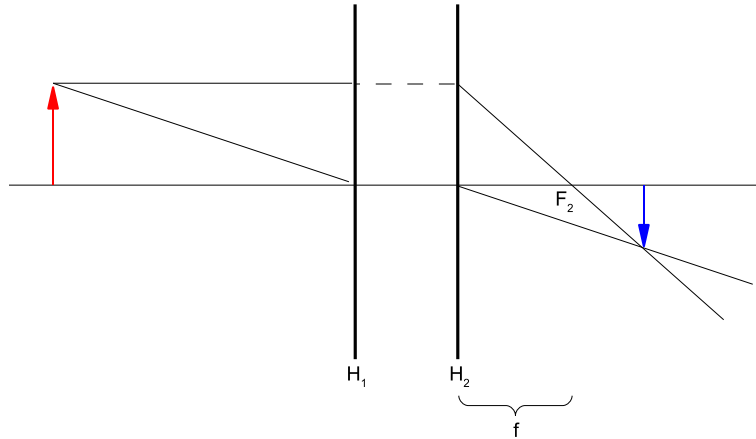


Figura 3.9:

$$\frac{n}{f_{12}} = \frac{n-1}{R_1}$$

dove  $R_1$  è il raggio di curvatura del primo diottro, che vale:

$$R_1 = \frac{n-1}{n} f_{12}$$

Il fuoco  $f_{12}$  diventerà punto-oggetto per il secondo diottro:

$$\frac{n}{d-f_{12}} + \frac{1}{\overline{V_2 F_2}} = \frac{1-n}{-R_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

dove  $R_2$  è il raggio di curvatura del secondo diottro, che vale:

$$R_2 = \frac{n-1}{n} f_{21}$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{1}{\overline{V_2 F_2}} = \frac{n}{f_{12}-d} + \frac{n}{f_{21}} = n \frac{f_{21} + f_{12} - d}{f_{21}(f_{12}-d)}$$

$$\overline{V_2 F_2} = \frac{f_{21}(f_{12}-d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)}$$

Ora facciamo delle considerazioni basate sulle proprietà dei piani principali e dei punti nodali (Fig. 3.11). Dato un punto-oggetto fuori asse, consideriamo quello tra i raggi

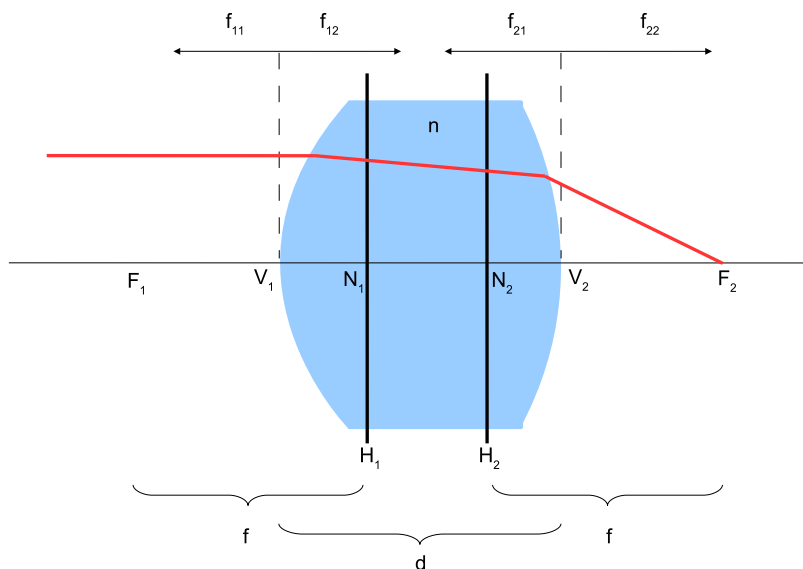


Figura 3.10:

incidenti che emerge dalla lente parallelo a sè stesso. I due punti di intersezione dei suoi prolungamenti con l'asse ottico sono detti **punti nodali**. Per una lente in aria (o immersa in un mezzo con un unico indice di rifrazione) i punti nodali coincidono con i punti principali.

Siano adesso  $O_1$  e  $O_2$  i centri di curvatura dei diottri,  $C$  il centro ottico della lente,  $B_1$  e  $B_2$  i punti dove incide ed emerge il raggio di luce,  $N_1$  e  $N_2$  i punti nodali.

Dalla similitudine dei triangoli  $B_1CO_1$  e  $B_2CO_2$  si ottiene:

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{R_1}{-R_2}$$

$$O_2O_1 = O_1C - O_2C = O_1C + \frac{R_2}{R_1}O_1C = \frac{R_1 + R_2}{R_1}O_1C$$

da cui:

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2}O_2O_1$$

Adesso,

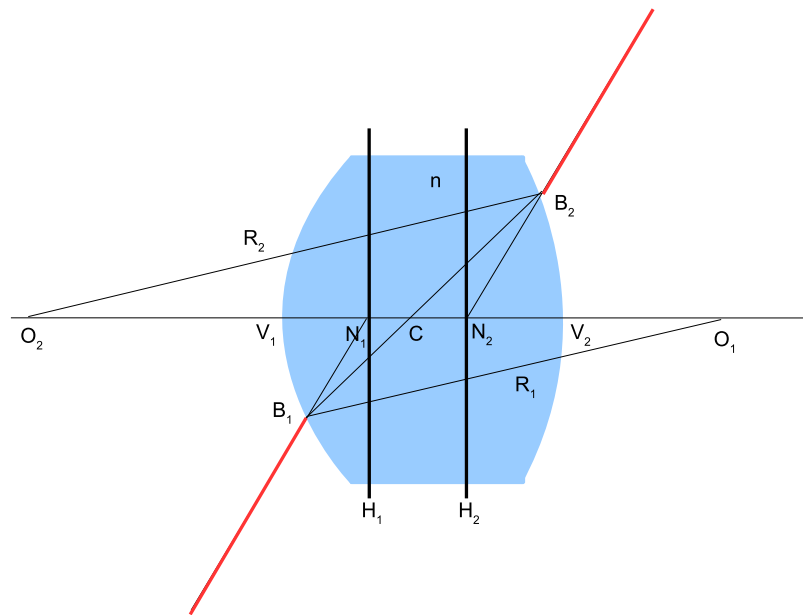


Figura 3.11:

$$O_2O_1 = (R_1 - d) + d + (R_2 - d) = R_1 + R_2 - d$$

e quindi

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2 - d) = R_1 - \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

Calcoliamo adesso le distanze dei vertici della lente dal centro ottico della lente stessa.

$$V_1C = O_1V_1 - O_1C = R_1 - R_1 + \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_2C = d - V_1C = d - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo l'espressione dei raggi in funzione delle focali, si ottiene:

$$V_1C = \frac{d \frac{n-1}{n} f_{12}}{\frac{n-1}{n} f_{12} + \frac{n-1}{n} f_{21}} = \frac{df_{12}}{f_{12} + f_{21}}$$

$$V_2C = \frac{df_{21}}{f_{12} + f_{21}}$$

A questo punto possiamo ricavare la distanza del secondo piano principale dal vertice del secondo diottro. I punti C e  $N_2$  sono coniugati, in particolare se C è il punto-oggetto,  $N_2$  è il punto-immagine.

$$\frac{n}{V_2C} - \frac{1}{V_2N_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

$$\frac{1}{V_2N_2} = \frac{n}{V_2C} - \frac{n}{f_{21}} = n \left( \frac{f_{12} + f_{21}}{df_{21}} \right) - \frac{n}{f_{21}} = \frac{n}{df_{21}} (f_{12} + f_{21} - d)$$

$$V_2N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

Infine possiamo calcolare la lunghezza focale della lente:

$$f = \overline{V_2F_2} + \overline{V_2N_2} = \frac{f_{21}(f_{12} - d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)} + \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

da cui si ottiene:

$$f = \frac{f_{12}f_{21}}{n(f_{21} + f_{12} - d)} \quad (3.8)$$

oppure:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{nd}{f_{12}f_{21}} \quad (3.9)$$

Possiamo riscrivere a questo punto le distanze dei piani principali dai vertici della lente, usando la lunghezza focale:

$$V_2 N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)} = \frac{d}{f_{12}} f \quad (3.10)$$

e analogamente per l'altro vertice:

$$V_1 N_1 = \frac{d}{f_{21}} f \quad (3.11)$$

Sulla base delle relazioni fra le focali dei due diottri e i rispettivi raggi di curvatura, è possibile ottenere espressioni equivalenti per la lunghezza focale della lente spessa:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{n(f_{11}f_{22})} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{f_{12}f_{22}} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{d}{f_{11}f_{21}} \quad (3.12)$$

### 3.3 Esempi

Secondo le convenzioni fin qui adottate, i fuochi sono positivi per diottri convessi ( $R > 0$ ), mentre sono negativi per i diottri concavi ( $R < 0$ ).

#### 3.3.1 Lente biconvessa simmetrica

$R_1 = 12 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 12 \text{ cm}$ ,  $d = 1.2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

$$f = \frac{36 \cdot 36}{1.5(36 + 36 - 1.2)} = 12.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.12).

#### 3.3.2 Lente biconvessa asimmetrica

$R_1 = 6 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 12 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

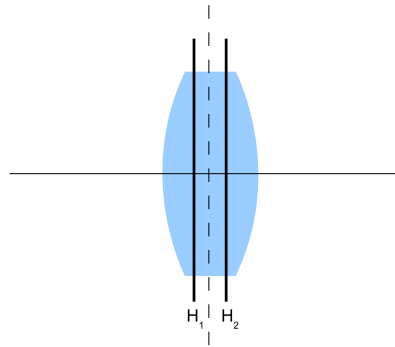


Figura 3.12:

$$f = \frac{18 \cdot 36}{1.5(18 + 36 - 2)} \simeq 8.3 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 8.3}{36} = 0.46 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 8.3}{18} = 0.92 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente, ma spostati verso il diottrio con minore raggio di curvatura (Fig. 3.13).

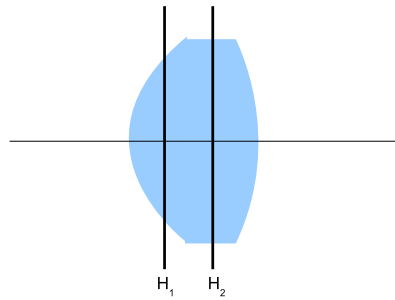


Figura 3.13:

### 3.3.3 Lente divergente simmetrica

$R_1 = -8 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -8 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$



$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm}$$

$$f = \frac{(-24) \cdot (-24)}{1.5(-24 - 24 - 2)} = -7.7 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.14).

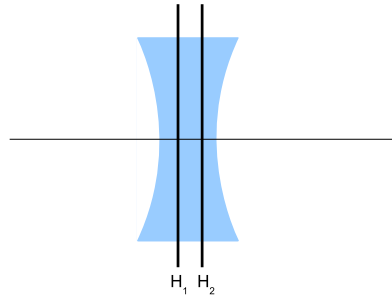


Figura 3.14:

### 3.3.4 Lente piano-convessa

$R_1 = 6 \text{ cm}$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1}6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \infty$$

Dall'equazione 3.9 otteniamo:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}}$$

e quindi, la focale di questa lente vale:

$$f = \frac{18}{1.5} = 12 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = 0 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1 \cdot 12}{18} = 0.67 \text{ cm}$$

Il primo piano principale è tangente al vertice del primo diottro, il secondo piano è interno alla lente (Fig. 3.15).

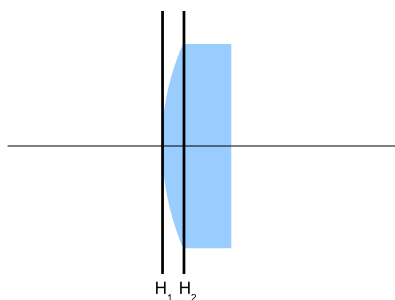


Figura 3.15:

### 3.3.5 Lente menisco-convergente

$R_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -50 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 20 = 60 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-50) = -150 \text{ cm}$$

$$f = \frac{60 \cdot (-150)}{1.5(60 - 150 - 2)} = 65.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 65.2}{-150} = -0.87 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 65}{60} = 2.17 \text{ cm}$$

I due piani principali sono entrambi esterni alla lente (Fig. 3.16)

### 3.3.6 Lente convesso-concava

$R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -10 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 10 = 30 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

$$f = \frac{30 \cdot (-30)}{1.5(30 - 30 - 2)} = 300 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 300}{-30} = -20 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 300}{30} = 20 \text{ cm}$$

I due piani principali sono lontani dalla lente, dal lato del primo diottro e sono separati da una distanza pari allo spessore della lente sull'asse ottico (Fig. 3.17).

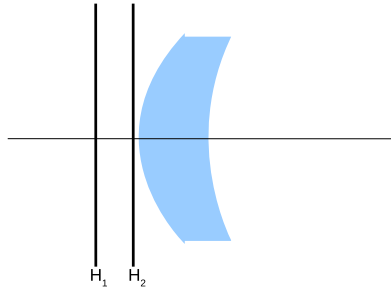


Figura 3.16:



Figura 3.17:

### 3.3.7 Lente concentrica

$R_1 = 12 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -10 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

$$f = \frac{36 \cdot (-30)}{1.5(36 - 30 - 2)} = -180 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-180)}{-30} = 12 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-180)}{36} = -10 \text{ cm}$$

I due piani principali sono coincidenti e si trovano in corrispondenza ai centri di curvatura (anch'essi coincidenti) della lente (Fig. 3.18).

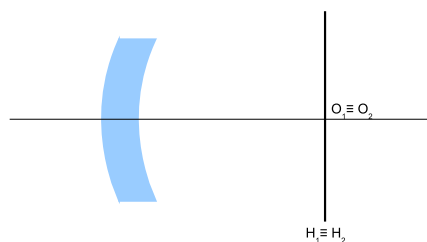


Figura 3.18:

### 3.3.8 Considerazioni

Possiamo raggruppare le proprietà di lenti e piani principali dicendo che:

- le lenti biconvesse e biconcave hanno i piani principali all'interno, equidistanti dai vertici se simmetriche;
- le lenti piano-convexe e piano-concave hanno un piano tangente alla faccia curva della lente;
- il menisco ha in genere i due piani esterni alla lente.

Poniamoci adesso la seguente domanda: è possibile avere una lente che in apparenza sia convergente (o divergente), ma che in realtà ha potere diottrico nullo?

Vediamo il seguente caso:

$R_1 = 25 \text{ mm}$ ,  $R_2 = -24 \text{ mm}$ ,  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $n = 1.6$

$$f_{12} = \frac{1.6}{1.6 - 1} 25 = 66.67 \text{ mm} \quad f_{21} = \frac{1.6}{1.6 - 1} (-24) = -64 \text{ mm}$$

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64 - 5)} = 1144.55 \text{ mm}$$

Quindi questa lente è convergente.

Se la lente fosse sottile avremmo che  $d = 0$ , per cui la focale sarebbe:

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64)} = -998.80 \text{ mm}$$

cioè sarebbe una lente divergente.

Quando il potere diottrico vale 0 ?

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} = \frac{nd}{f_{12}f_{21}}$$

da cui si ottiene:

$$d = f_{12} + f_{21} \quad (3.13)$$

Nel caso specifico, la lente dovrebbe avere spessore  $d = 2.67$  affinché il suo potere diottrico fosse nullo.

### 3.4 Lenti sottili separate

Nel caso in cui, anziché due diottri consideriamo due lenti sottili separate da una distanza  $d$  (Fig. 3.19), il ragionamento è analogo a quello della lente spessa, con però un'importante semplificazione:

$$f_{11} = f_{12} = f_1$$

$$f_{21} = f_{22} = f_2$$

$$n = 1$$

da cui si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3.14)$$

Si ha il massimo potere diottrico quando  $d = 0$ , cioè quando le lenti sono addossate. Mentre, si ha potere diottrico nullo quando:

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{d}{f_1 f_2} \Rightarrow f_1 + f_2 = d$$

Supponiamo di avere un sistema di due lenti sottili convergenti di lunghezza focale  $f_1 = 10$  cm e  $f_2 = 20$  cm, e poniamole a distanze pari a  $d = 0, 5, 10$  cm. Vediamo come cambia la lunghezza focale del sistema.

$$d = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = 0.15 \Rightarrow f = 6.67 \text{ cm}$$

$$d = 5 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{5}{10 \cdot 20} = 0.125 \Rightarrow f = 8 \text{ cm}$$

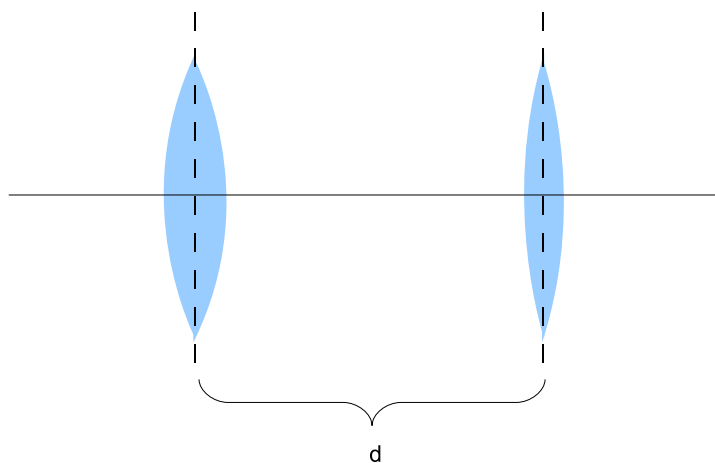


Figura 3.19:

$$d = 10 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{10}{10 \cdot 20} = 0.1 \Rightarrow f = 10 \text{ cm}$$

In quest'ultimo caso come si può vedere, la presenza della seconda lente non ha alcun effetto.

### 3.5 I doppietti

Se prendiamo due lenti piano-convesse, con la stessa focale,  $f_1 = f_2 = f$ , separate di una distanza  $d$  e con il lato curvo rivolto l'uno verso l'altro, otteniamo il **doppietto di Ramsden** (Fig. 3.20).

È chiaro che se  $d = f$ , non si ottiene alcun effetto diottrico, quindi in genere si usa una distanza inferiore del tipo  $d = 0.8f$ . In questo modo si ha:

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} - \frac{0.8f}{f^2} = \frac{2}{f} - \frac{0.8}{f} = \frac{1.2}{f}$$

da cui, la lunghezza focale del doppietto di Ramsden si può esprimere come  $f_R = 0.833f$ .

Calcoliamo le posizioni dei piani principali:

$$V_1N_1 = \frac{fd}{f_{21}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

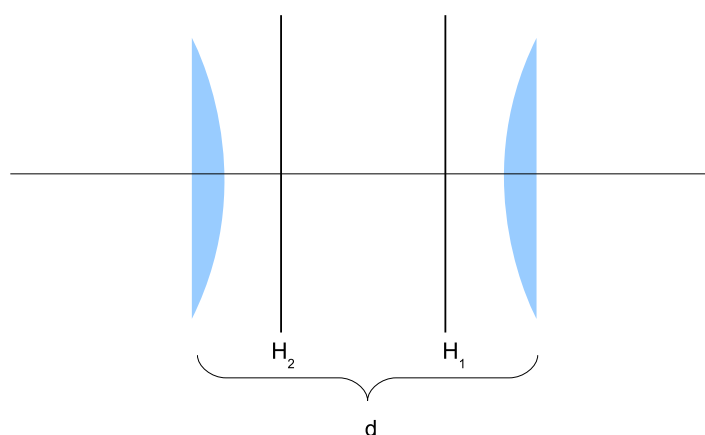


Figura 3.20:

$$V_2N_2 = \frac{fd}{f_{12}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

Come si vede i piani principali sono invertiti.

Nel **doppietto di Huygens** (Fig. 3.21) invece si ha tipicamente  $f_1 = 2f_2$  e la condizione è tale che  $\frac{1}{f} = \frac{3}{2f_1}$ . Vediamo quanto vale la separazione fra le due lenti:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{2}{f_1} - 2\frac{d}{f_1^2} = \frac{3}{2f_1}$$

da cui:

$$d = \frac{3}{4}f_1$$

che corrisponde alla semisomma delle lunghezze focali delle due lenti.

Calcoliamo le distanze dei piani principali dai vertici del doppietto:

$$V_1N_1 = \frac{\frac{2}{3}f_1 \cdot \frac{3}{4}f_1}{\frac{1}{2}f_1} = f_1$$

$$V_2N_2 = \frac{\frac{2}{3}f_1 \cdot \frac{3}{4}f_1}{f_1} = \frac{f_1}{2}$$

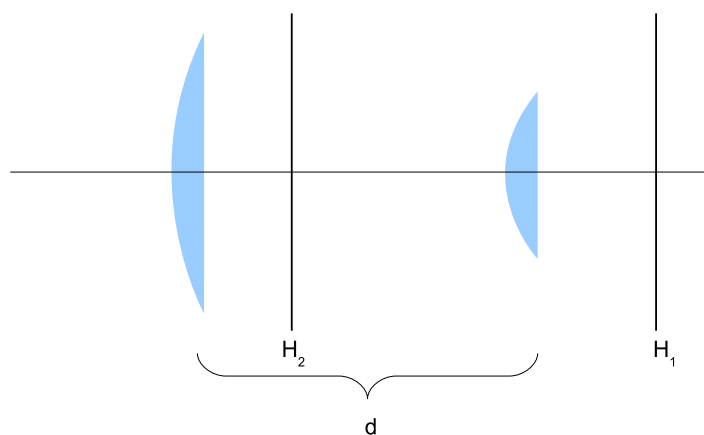


Figura 3.21:

Interessante è la combinazione di una lente positiva con una negativa, ma di uguale potenza (Fig. 3.22). Assumiamo che le lunghezze focali siano identiche, cambieranno solo i segni:  $f_1 = -f_2 = f$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f} + \frac{d}{f^2}$$

$$F = \frac{f^2}{d}$$

$$V_1 N_1 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{-f} = -f$$

$$V_2 N_2 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{f} = f$$

### 3.6 Diaframmi e pupille

Introduciamo adesso i concetti di **diaframma** e **pupilla** che saranno importanti quando tratteremo le aberrazioni.

Il diaframma è un'apertura che è in grado di limitare le dimensioni di una fascio di raggi luminosi che entrano in un sistema ottico, oppure di limitare l'angolo di entrata del fascio incidente. Nel primo caso si parla di **diaframma di apertura**, mentre nel secondo caso di **diaframma di campo**.



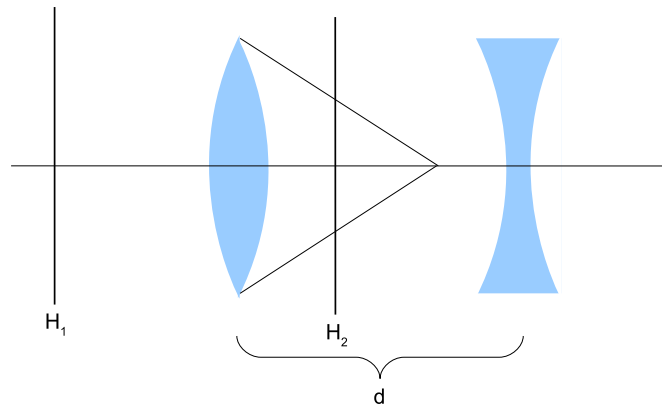


Figura 3.22:

Consideriamo il caso di una lente convergente sottile e un diaframma  $A_2B_2$  posto fra la lente e il fuoco secondario  $F_2$  (Fig. 3.23).

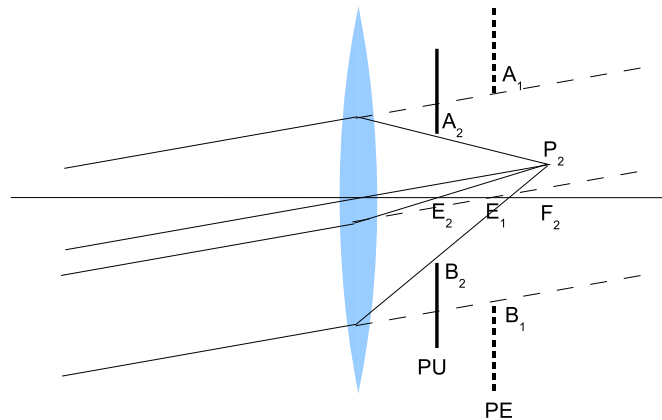


Figura 3.23:

Come si può notare dalla figura, il diaframma limita l'angolo di entrata del fascio di luce incidente, ma non determina l'apertura del fascio,  $A_1B_1$ , la quale corrisponde all'immagine virtuale del diaframma  $A_2B_2$ , ed è chiamata **pupilla di entrata**, perché rappresenta la vera apertura del fascio di luce utilizzato. Al contrario, il diaframma viene chiamato **pupilla di uscita**, perché rappresenta il limite del fascio uscente. Il raggio che passa per il centro della pupilla di entrata  $E_1$  e della pupilla di uscita  $E_2$  si

chiama **raggio principale**.

Se invece mettiamo il diaframma prima della lente, fra essa e il suo fuoco primario  $F_1$  (Fig. 3.24), si ottiene

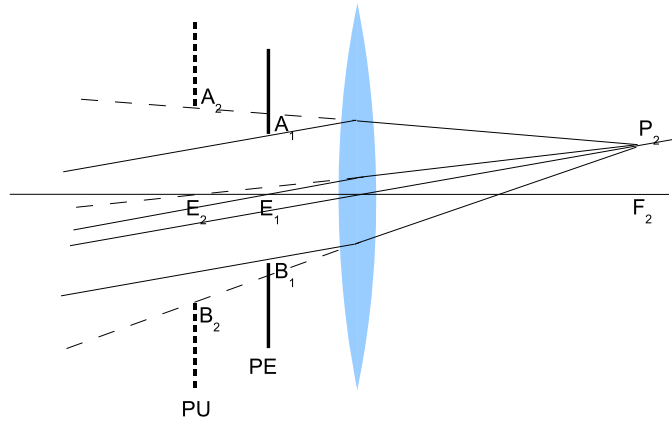


Figura 3.24:

che il diaframma funge da pupilla d'entrata, che limita l'apertura del fascio di raggi e anche l'angolo di entrata del fascio, mentre l'immagine virtuale del diaframma funge da pupilla di uscita.

È chiaro che se avviciniamo il diaframma fino a portarlo a contatto con la lente, pupilla di entrata e di uscita coincideranno.

Se invece abbiamo a che fare con un sistema di lenti e poniamo il diaframma all'interno (Fig. 3.25), chiameremo pupilla d'entrata l'immagine del diaframma formata dalla lente o dalle lenti che lo precedono, mentre chiameremo pupilla d'uscita l'immagine formata dalla lente o dalle lenti che lo seguono.

I piani che contengono diaframmi e pupille sono piani coniugati. In condizioni di assenza di aberrazioni, ogni punto del piano delimitato dal diaframma ha per immagine un punto delle due pupille.

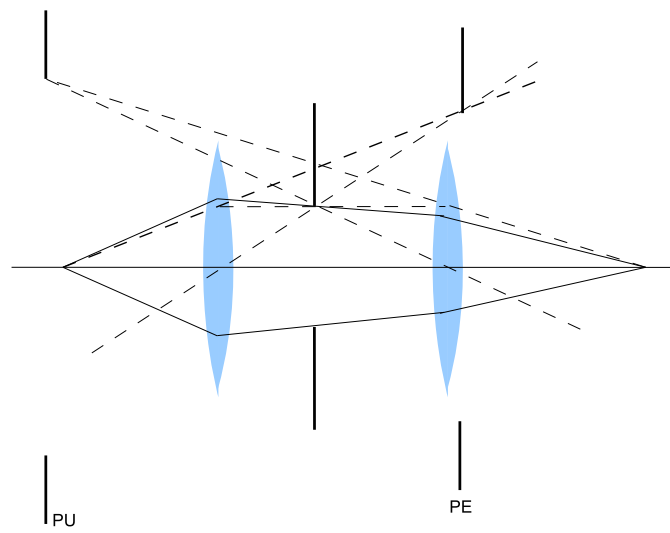


Figura 3.25:

