

## Capitolo 2

# Diottro sferico

Si indica con il termine **diottro sferico** una calotta sferica che separa due mezzi con indice di rifrazione diverso. La congiungente il centro di curvatura  $C$  della calotta con il vertice  $V$  viene chiamata asse principale del diottro.

Sia  $P$  il punto-oggetto sull'asse del diottro,  $n$  ed  $n'$  gli indici di rifrazione dei due mezzi separati dal diottro,  $Q$  il punto-immagine,  $\overline{PP'}$  un raggio incidente sulla superficie del diottro,  $\overline{P'Q}$  il corrispondente raggio rifratto,  $\overline{CP'}$  il raggio di curvatura del diottro,  $i$  ed  $r$  gli angoli di incidenza e di rifrazione,  $\varphi$ ,  $\varphi'$  e  $\omega$  gli angoli compresi rispettivamente fra raggio incidente, raggio rifratto e raggio di curvatura del diottro con l'asse ottico.  $P$  e  $Q$  vengono chiamati **punti coniugati** e i piani passanti per essi e perpendicolari all'asse ottico ( $\pi$  e  $\pi'$ ) vengono chiamati **piani coniugati** (Fig. 2.1).

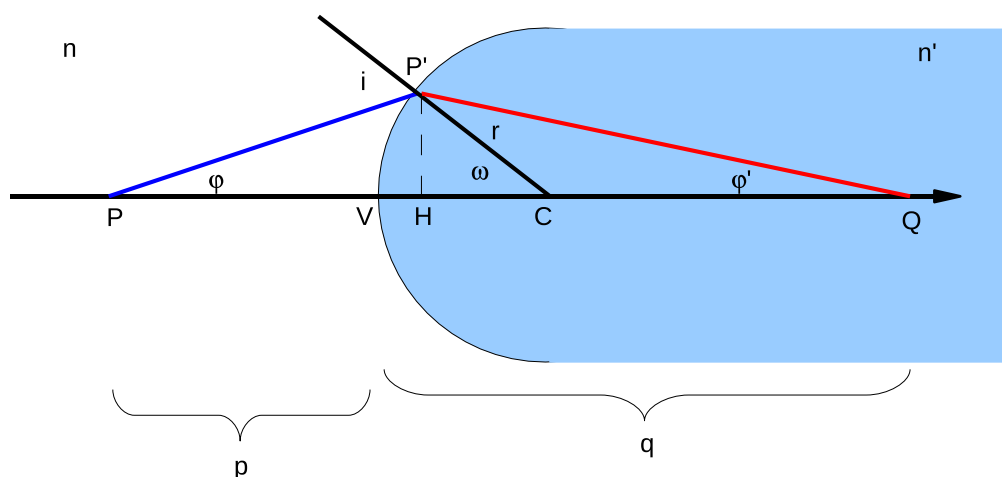


Figura 2.1: Schema ottico del diottro sferico.

Impostiamo la legge della rifrazione di Snell:

$$n \sin i = n' \sin r$$

Dalla figura, possiamo scrivere  $i = \varphi + \omega$  e  $r = \omega - \varphi'$ , e sostituendo si ha:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

$$n[\sin\omega\cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega] = n'[\sin\omega\cos\varphi' - \sin\varphi'\cos\omega]$$

Esprimiamo ora le funzioni trigonometriche in termini di segmenti. Chiamiamo  $R$  il raggio di curvatura del diottro.

$$n \left[ \frac{\overline{P'H} \overline{PH}}{R \overline{PP'}} + \frac{\overline{P'H} \overline{HC}}{\overline{PP'} \overline{R}} \right] = n' \left[ \frac{\overline{P'H} \overline{HQ}}{R \overline{P'Q}} - \frac{\overline{P'H} \overline{HC}}{\overline{P'Q} \overline{R}} \right]$$

Per angoli  $\varphi$  e  $\omega$  piccoli,  $H \rightarrow V$ ,  $\frac{\overline{HC}}{R} \rightarrow 1$ ,  $\frac{\overline{HQ}}{\overline{P'Q}} \rightarrow 1$  e  $\frac{\overline{PH}}{\overline{PP'}} \rightarrow 1$ . Se ora chiamiamo  $p$  la distanza fra l'oggetto e il vertice del diottro e  $q$  la distanza fra il vertice del diottro e l'immagine, otteniamo:

$$n \left[ \frac{\overline{P'H}}{R} + \frac{\overline{P'H}}{p} \right] = n' \left[ \frac{\overline{P'H}}{R} - \frac{\overline{P'H}}{q} \right]$$

$$n \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{p} \right] = n' \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right]$$

e infine:

$$\boxed{\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}} \quad (2.1)$$

che è nota con il nome di **formula di Gauss per il diottro sferico**.

È possibile ottenere lo stesso risultato partendo da:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

e applicando l'espansione in serie di McLaurin di  $\sin$  e  $\cos$  arrestate al primo ordine:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Da cui:

$$n(\varphi + \omega) \cong n'(\omega - \varphi')$$

$$n\varphi + n\omega = n'\omega - n'\varphi'$$

$$n\varphi + n'\varphi' = (n' - n)\omega$$

E infine:

$$n \frac{\overline{P'H}}{\overline{PH}} + n' \frac{\overline{P'H}}{\overline{HQ}} = (n' - n) \frac{\overline{P'H}}{\overline{HC}}$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}$$

come ottenuto prima.

L'approssimazione applicata a questa trattazione, chiamata anche **parassiale**, è nota come **approssimazione di Gauss**. Essa consiste non soltanto nel considerare raggi che formano un angolo piccolo con l'asse ottico, ma che oltre a ciò incidono in un' area ristretta intorno al vertice della calotta sferica. Perciò dato un punto-oggetto che si trovi fuori dall'asse ottico, ma non troppo distante da esso, la formula di Gauss per il diottro sferico può servire a calcolare la distanza del punto-immagine. In definitiva possiamo ragionevolmente assumere che solamente in approssimazione di Gauss il diottro sferico si comporti come un sistema stigmatico ed ortoscopico, cioè un sistema in cui tutti i raggi uscenti da P vanno ad incontrarsi in Q e in cui un oggetto che si trovi in un piano  $\pi$  abbia un'immagine simile in un piano  $\pi'$ .

## 2.1 Definizione dei fuochi

Ripartendo dalla (2.1) e assumendo che l'immagine si formi all'infinito ( $q \rightarrow \infty$ ), si ottiene:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R}$$

dove  $f = p = \overline{FV}$ .

Se invece è l'oggetto a trovarsi all'infinito ( $p \rightarrow \infty$ ) avremo:

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{R}$$

dove  $f' = q = \overline{VF'}$ .

Le quantità  $f$  e  $f'$  vengono chiamate **fuochi** del diottro (Fig. 2.2).

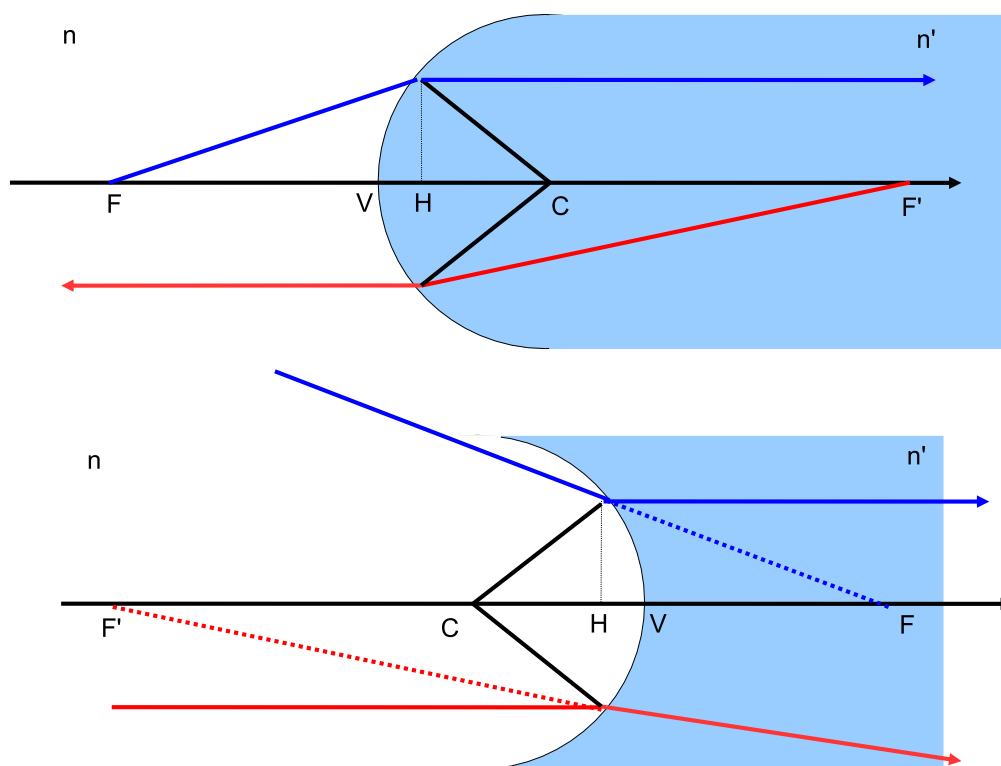


Figura 2.2: In alto uno diottro sferico convergente. I raggi uscenti dal fuoco  $F$  o dal fuoco  $F'$  diventano un fascio parallelo all'asse ottico. In basso un diottro sferico divergente. I raggi, i cui prolungamenti sono diretti verso il fuoco  $F$ , diventano paralleli all'asse ottico.

Si deduce facilmente la relazione fra i fuochi:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f'}$$

da cui:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} \quad (2.2)$$

cioè la distanza del fuoco dal vertice del diottro è tanto maggiore quanto maggiore è il valore dell'indice di rifrazione del mezzo. Le posizioni dei fuochi sono simmetriche solo nel caso in cui i due mezzi abbiano lo stesso indice di rifrazione, cosa che si verifica nel

caso in cui la superficie sferica del diottro abbia uno spessore molto sottile rispetto alla distanze in gioco.

## 2.2 Formazione dell'immagine

Per costruire l'immagine di un oggetto esteso possiamo sfruttare le proprietà appena viste del diottro.

Assumiamo per semplicità che l'oggetto si trovi in un piano ortogonale all'asse ottico del diottro. Inoltre l'oggetto abbia un'estremità sull'asse ottico (A) e l'altra si trovi nella parte superiore, che per convenzione indichiamo positiva (B). La dimensione dell'oggetto sarà  $\overline{AB}$ . Da B tracciamo un raggio parallelo all'asse ottico, e lo prolunghiamo nel mezzo  $n'$  in modo che intersechi il fuoco  $F'$ . Sempre da B tracciamo un secondo raggio, diretto verso il centro di curvatura del diottro (C): questo raggio non subirà rifrazione in quanto la sua direzione è ortogonale alla superficie del diottro nel punto di attraversamento. L'intersezione fra i due raggi darà la posizione del punto-immagine B'. Mentre per avere il punto-immagine A' basterà tracciare da B' la normale all'asse ottico (Fig. 2.3).

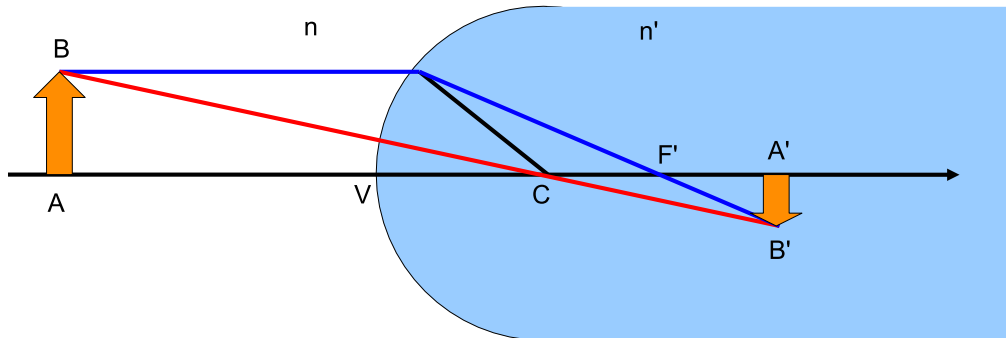


Figura 2.3: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa di dimensione  $\overline{AB}$ .

Il punto-oggetto A si troverà a distanza  $p$  dal vertice V del diottro, mentre il punto-immagine A' sarà a distanza  $q$ . Consideriamo ora i triangoli ABC e A'B'C. Come si vede sono simili, per cui se è R il raggio di curvatura del diottro, possiamo scrivere:

$$\frac{\overline{A'B'}}{q - R} = \frac{\overline{AB}}{p + R}$$

da cui, definiamo la quantità **ingrandimento**  $m$  come:

$$m = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{q - R}{p + R} \quad (2.3)$$

Dalla formula si può notare che man mano che aumenta la distanza dell'oggetto dal diottro, l'immagine diventa più piccola e al limite tende a zero quando l'oggetto è all'infinito. Inoltre l'ingrandimento vale 1 (Fig. 2.4) quando l'oggetto è a distanza:

$$p = q - 2R$$

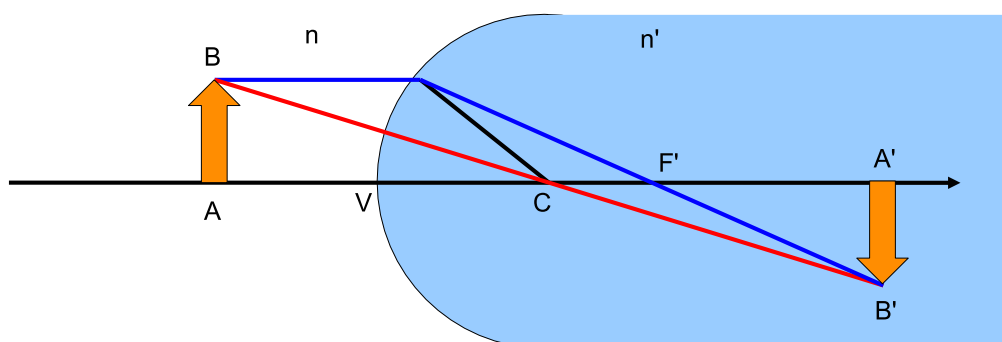


Figura 2.4: Condizione per avere ingrandimento pari a 1, cioè  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

ed è maggiore di 1 (Fig. 2.5) quando:

$$p < q - 2R$$

mentre è minore di 1 nel caso opposto. Si noti inoltre che l'immagine appare rovesciata.

Proviamo adesso a considerare il caso del diottro sferico concavo (Fig. 2.6).

Come prima tracciamo da B verso il diottro un raggio parallelo all'asse ottico del sistema. A causa della rifrazione questo divergerà e dovremo quindi considerare il prolungamento all'indietro del raggio rifratto verso il punto focale F. Poi tracciamo da B un raggio che intersechi il centro ottico del diottro. I due raggi definiranno il punto immagine B'. Come si nota, l'immagine ottenuta è virtuale, dalla stessa parte dell'oggetto e dritta.

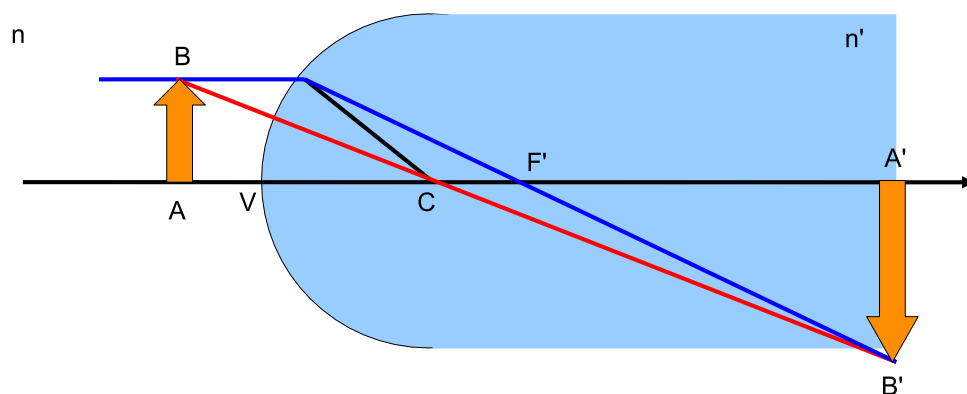


Figura 2.5: L'ingrandimento aumenta quando la sorgente si avvicina al vertice V.

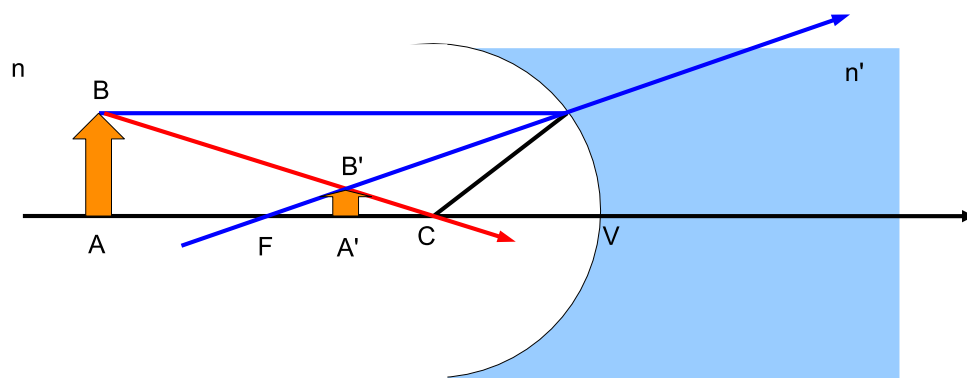


Figura 2.6: Costruzione dell'immagine nel caso di un diottro sferico divergente.

